Wissenschaftliches Rechnen I, Übungsaufgaben

Untergliederte Aufgaben sollen in *eine* Programm-Datei aufgenommen werden, ggf. kann durch einen Dialog der nächste Teilschritt angefordert werden. Achten Sie darauf, daß der Bildschirm nicht „wegläuft“!
Die Lösungen sollen als Programmtexte in das Verzeichnis `~hgrass/wr/Ihr_Name` kopiert werden. Ich schreibe dorthin eine Datei `name.res` mit der Bewertung der Lösungen. Damit ich die Dateien schnell finden kann, benennen Sie diese wie folgt: a01.java, ... , a24.java. Es ist erlaubt, sogar erwünscht, daß Sie in Gruppen zu zweit oder dritt arbeiten.
Bis Weihnachten sind mindestens 50 Punkte zu erreichen (die Aufgaben können beliebig gewählt werden). Im Januar/Februar sind dann „größere“ Projekte in kleinen Gruppen zu bearbeiten.

1. (a) Bestimmen Sie experimentell die maximale und die minimale int- und long-Zahl, verwenden Sie die Funktion `Integer.MAX_VALUE()`.
   (b) Dividieren Sie x, beginnend mit $x = 1$, fortlaufend durch 2, bis $x = 0$ ist. Wieviele Schritte braucht das? $y = 1 + x$, bis $y = 1$ wird. Wieviele Schritte?
   (c) Berechnen Sie den Wert der (divergenten) Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$. (3)

2. Berechnen Sie näherungsweise ein Produkt vieler Zahlen, das größer als 10^{40} ist und geben Sie das Ergebnis in der Form „1.2345e17 mal 10 hoch 245“ aus. Wie kann man die Korrektheit des Programms überprüfen? (3)

3. Berechnen Sie $\sqrt[3]{a}$ mittels Quadratwurzeln: Sei $x^3 = a$, dan ist $x^4 = a \cdot x$, also $x^2 = \sqrt{ax}$ und $x = \sqrt{\sqrt{ax}}$. Wählen Sie also x_0 und iterieren Sie $x_{i+1} = \sqrt{\sqrt{ax_i}}$. (3)

4. (a) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{h \to 0}$ des Differenzenquotienten $\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$ für $x = 1$ und vergleichen Sie mit $\cos(1)$. Für welches h ist der Fehler am geringsten?
   (b) Versuchen Sie es mit dem symmetrischen Quotienten $\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$. (2)

5. Bestimmen Sie $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ für $x = \pm 0.5, \pm 1, \pm 10, \ldots, \pm 50$. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit $\exp(x)$ bzw. $1/\exp(-x)$. Halten Sie bei $x = \pm 50$ fest, welches das absolut größte Reihenglied war. Berechnen Sie jeden Summanden aus dem vorangehenden. Was passiert, wenn Sie (uneffektiv) jeden Summanden einzeln berechnen? (3)

6. Taschenrechner berechnen die Werte der Sinusfunktion im Bereich $0 \le x \le \pi/4 = 0.8$ mittels $\sin(x) = ((x^2/20 + 1)^{-1} \cdot 10 - 7) \cdot x/3$ bzw. durch $(((x^2/42 + 1)^{-1} \cdot 21 - 11) \cdot x^2/(-60) + 1) \cdot x$. Durchforsten Sie das Intervall in 1/10-Schritten und vergleich Sie die Ergebnisse mit der Math.sin-Berechnung. (2)

7. Die Γ-Funktion kann wie folgt definiert werden:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Wenn x eine natürliche Zahl ist, gilt $\Gamma(x) = x!$. Überprüfen Sie, für welche Werte von n der obige Bruch eine vernünftige Näherung darstellt. Wie kann man z.B. $\Gamma(7.5)$ besser „berechnen"? (4)

8. „Zufallszahlen": Wir setzen A = 12345 (oder ein anderer Anfangswert) und M = 899 (oder eine andere Zahl) und iterieren A = A * M. Wenn A negativ wird, so addieren wir 2^{15} (Wie geht das?). Die Folge wird periodisch. Probieren Sie As und Ms aus, so daß die Periode möglichst lang wird. (4)

9. Berechnen Sie die Lösungen der quadratischen Gleichung $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$, deren Koeffizienten a, b, c vom Nutzer eingegeben werden sollen. (2)

10. Schreiben Sie ein Programm, bei dem der Rechner sich eine Zahl zwischen 0 und 1000 „denkt" und der Nutzer die Zahl erraten soll. Auf jeden Tip soll die Antwort „größer" oder „kleiner" gegeben werden. Das Programm soll schießlich die Leistung des Nutzers bewerten.

    Denken Sie sich eine Zahl und lassen Sie den Rechner raten. (2)

11. (a) Geben Sie für eine eingegebene Zahl alle Teiler an.
    (b) Untersuchen Sie, ob eine eingegebene Zahl eine Primzahl ist.
    (c) Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler zweier Zahlen. Wie viele Rechenoperationen brauchen Sie?
    (d) Berechnen Sie die Summe $s(x)$ aller von s verschiedenen Teiler der Zahl x. Überprüfen Sie, ob die Zahl x eine vollständige Zahl ist (d.h. $s(x) = x$, z.B. $s(6) = 1 + 2 + 3 = 6$). Gibt es ungerade vollständige Zahlen?
    (e) Zwei Zahlen x und y heißen befreundet, wenn $s(x) = y$ und $s(y) = x$ gilt. Suchen Sie Paare befreundeter Zahlen (vollkommene Zahlen sind mit sich selbst befreundet). (10)

12. Schreiben Sie ein Programm, daß alle Primzahlen $3 < p < 100$ bestimmt und höchstens 40 arithmetische Operationen durchführt. Die Erhöhung des Zählindex in einer DO-Schleife ist keine arithmetische Operation. (3)

13. (Binäre Division mit Rest) Seien a und b natürliche Zahlen. Wenn der Quotient und der Rest bei $a/2b$ bekannt ist, so erhält man Quotienten und Rest von a/b wie folgt (es gilt $a = 2b \cdot q + r,\ 0 \le r < 2b$):

    wenn $r < b$, so $a = b \cdot 2q + r$, also Quotient $= 2q$, Rest $= r$.

    wenn $r \ge b$, so $a = b \cdot (2q + 1) + r - b$, also Quotient $= 2q + 1$, Rest $= r - b$.

    Bestimmen Sie allein unter Verwendung der Addition und der Verdopplung Quotient und Divisionsrest zweier gegebener Zahlen.

Beispiel: $a = 100,\ b_0 = 7,\ b_1 = 14,\ b_2 = 28,\ b_3 = 56,\ b_4 = 112 > a$, nun beginnt der obige Algorithmus: $q_4 = 0,\ r_4 = 100 > b_3,\ q_3 = 1,\ r_3 = 44 > b_2,\ q_2 = 3,\ r_2 = 16 > b_1,\ q_1 = 7,\ r_1 = 2 < b_0,\ q_0 = 14,\ r_0 = 2.$ (5)

14. Übersetzen Sie dieses Programm in Java und interpretieren Sie das Ergebnis:

```
program ggt;
var a, b, r: array[1..2] of longint;
    q, x, y, u, v: longint;
begin
  writeln('a : ');
  readln(x);
  b[1]:= x;
  writeln('b : ');
  readln(y);
  r[1]:= y;
  b[2]:= 0;
  r[2]:= 1;
  repeat
    a:= b;
    b:= r;
    q:= a[1] div b[1];
    r[1]:= a[1] mod b[1];
    r[2]:= a[2] - q * b[2];
  until r[1] = 0;
  v:= b[2];
  u:= (b[1] - y * b[2]) div x;
writeln(' ggT ', b[1], ' Probe ',u:5,v:5, x*u + y*v:5);
readln;
end.
```

(5)

15. Schreiben Sie eine Prozedur split(a, n, b), so daß bei einer gegebenen natürlichen Zahl $a = 2^n b$ der Zweierexponent n und der ungerade Anteil b bestimmt werden. Verwenden Sie split zur ggT-Berechnung ohne Divisionen:

$$\mathrm{ggT}(2^n x, 2^m y) = 2^{\min(n,m)} \cdot ggT(x, y - x).$$

(Sei etwa $y > x$.) Beachten Sie, daß $y - x$ eine gerade Zahl ist. (4)

16. Verwenden Sie die Beziehung

$$\mathrm{ggT}(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{ggT}(x_1 \bmod x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_n \bmod x_i),$$

falls $x_i \neq 0$ ist. Bestimmen Sie ggT(20604, 53227, 25755, 20927, 78421). (3)

17. (a) Zählen Sie alle Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$ auf; deren Menge wird mit S_n bezeichnet.

(b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A = (a_{ij})$:

$$det(A) = \sum_{p \in S_n} sgn(p) \cdot a_{1,p(1)} \cdots a_{n,p(n)}.$$

(6)

18. Die Koordinaten der Eckpunkte eines Dreiecks sollen eingegeben werden. Ihr Programm soll entscheiden, ob es sich ggf. um ein gleichschenkliges, gleichseitges, rechtwinkliges, ... Dreieck handelt und seien Flächeninhalt berechnen. (2)

19. Schreiben Sie ein Programm, das alle dreistelligen Zahlen mit den Ziffern 1, 3, 5, 7 ausgibt. Wählen Sie die Ausgabe so, daß alle Ziffern gleichzeitig auf dem Bildschirm sichtbar sind. (2)

20. Schreiben Sie ein Programm, das Tannenbäume unterschiedlicher Höhe druckt. (2)

21. Im Kreis stehen die Kinder 1, 2, $\ldots$, n. Nach einem m-silbigen Abzählreim scheidet das jeweils m-te Kind aus, bis niemand mehr im Kreis steht. Ein Programm soll bei vorgegebenen n, m die Reihenfolge des Ausscheidens ausgeben. Beispiel: Bei $n = 6, m = 5$ ergibt sich 5, 4, 6, 2, 3, 1. (4)

22. Auf einem Schachbrett sind 8 Damen so aufzustellen, daß sie sich gegenseitig nicht bedrohen. Implementieren Sie folgenden Algorithmus:

    0. Stelle in Reihe a eine Dame auf a1.

    1. Stelle in der nächten Reihe eine Dame auf das erste mögliche freie Feld (im ersten Schritt also b3).

    2. Wiederhole Schritt 1, solange es geht.

    3. Wenn die letzte Reihe (h) erreicht ist, so hat man eine gültige Stellung gefunden. Die nächste Stellung findet man, indem man die Dame in Reihe h auf das nächste freie Feld setzt.

    4. Wenn es in einer Reihe kein freies Feld mehr gibt, geht man eine Reihe zurück und sucht dort das nächste freie Feld.

    5. Das Ende ist erreicht, wenn es für die Dame in Reihe a kein freies Feld mehr gibt.

    Wieviele Stellungen gibt es? (10)

23. (Faktorisierung nach Fermat) Sei $n = ab,\ a > b$ ungerade. Wir setzen $x = \frac{a+b}{2},\ y = \frac{a-b}{3}$, dann ist $n = ab = (x+y)(x-y) = x^2 - y^2$. Beginnend bei $x = \sqrt{n}$ erhöhen wir x, bis $x^2 - n = y^2$ ein Quadrat ist. Dann haben wir eine Zerlegung von n gefunden.

    Man braucht noch eine Funktion, die die Wurzel aus einer natürlichen Zahl zieht. Verwenden Sie dazu die Iteration $y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_n + \frac{y}{v_n})$. (3)

24. Schreiben Sie ein Programm, das seinen eigenen Quelltext ausgibt. (10)

25. Überprüfen Sie, ob jede gerade natürliche Zahl>2 die Summe zweier Primzahlen ist.

26. (Problem von Syracuse, ungelöst) Sei x eine natürliche Zahl. Wenn x gerade ist, wird es durch 2 geteilt. Wenn x ungerade ist, so wird es durch $3x + 1$ ersetzt. Behauptung: Nach endlich vielen Schritten wird $x = 1$. (∞)