Geometrie

Der Satz von Ptolemäus

Autor: Peter Andree

Inhaltsverzeichnis

8 Der Satz von Ptolemäus

8.1 Der Satz von Ptolemäus und sein klassischer Beweis

Satz – Satz von Ptolemäus
In einem Sehnenviereck ist die Summe der Produkte der gegenüberliegenden Seiten gleich dem Produkt der Diagonalen. □

Bemerkung: Bezeichnet man die Seiten des Sehnenvierecks mit a, b, c und d, die Diagonalen x und y, kann man die Aussage des Satzes

$$xy = ac + bd \tag{1}$$

formulieren.

Beweis: Wir bedienen uns einer Hilfskonstruktion, $Q \in [BD]$, so daß $\angle DAC \equiv \angle QAB$.

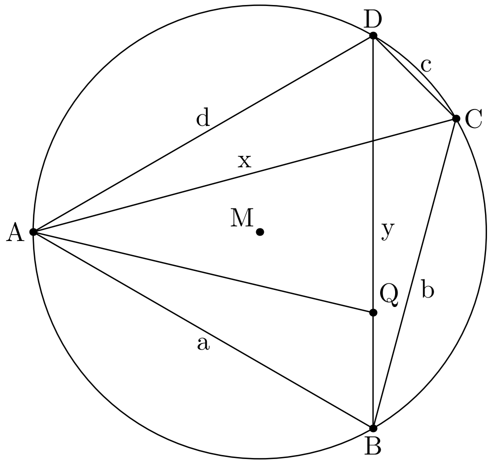

Abbildung 1: Satz von Ptolemäus

$$\begin{aligned}
\triangle DAC \sim \triangle QAB \quad (-\text{ der Beweis ist einfach } \Rightarrow \\
\frac{|DA|}{|AQ|} = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|BQ|} \Rightarrow |AC| \cdot |BQ| = |AB| \cdot |CD| \qquad (2) \\
\triangle DAQ \sim \triangle CAB - \text{der Beweis ist einfach } \Rightarrow \\
\frac{|DA|}{|CA|} = \frac{|AQ|}{|AB|} = \frac{|QD|}{|BC|} \Rightarrow |AC| \cdot |QD| = |BC| \cdot |DA| \qquad (3)
\end{aligned}$$

Aus den Beziehungen (2) und (3) folgt

$$\begin{aligned}
&|AC| \cdot |BQ| + |AC| \cdot |QD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA| \Rightarrow \\
&|AC| \cdot (|BQ| + |QD|) = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA| \Rightarrow \\
&|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA|
\end{aligned}$$

□

8.2 Verhältnis der Diagonalen im Sehnenviereck

Satz – Verhältnis der Diagonalen im Sehnenviereck

In einem Sehnenviereck ist das Verhältnis der Diagonalen gleich dem Verhältnis der Summen der Produkte der Seiten, die sich in den Endpunkten der Diagonalen des Sehnenvierecks treffen. □

Bemerkung: Mit der vereinfachten Bezeichnung der Seitenlängen, a, b, c, d und der Diagonalen x, y, lautet die Aussage des Satzes

$$\frac{x}{y} = \frac{ad + bc}{ab + cd}. \qquad (4)$$

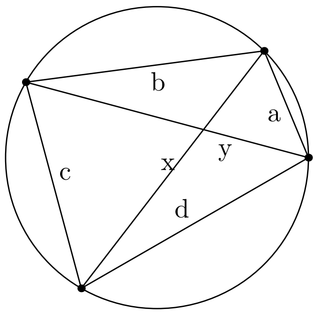

Abbildung 2: a, b, c, d

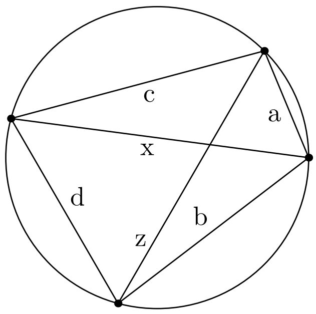

Abbildung 3: a, c, d, b

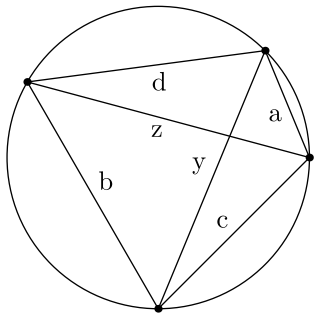

Abbildung 4: a, d, b, c

Beweis: Wir verfolgen eine Idee von [1]. Mit a als Startseite, haben wir 6 Möglichkeiten ($P_3 = 3!$, für b, c, d) Sehnenvierecke zu bilden, sihe die Abbildungen (2), (3) und (4). Anhand der Seitenanordnung ergibt dieses:

$$\begin{array}{ccc} abcd & acdb & adbc \\ adcb & abdc & acbd \end{array}$$

Es gibt nur drei verschiedene Sehnenvierecke, da die Sehnenvierecke in jeder Spalte kongruent sind (Seitenanordnung in verschiedenem Sinn). Ganz einfach kann bewiesen werden, dass diese Sehnenvierecke 3 Diagonalen haben, die paarweise auftreten, siehe die Abbildungen (2), (3) und (4). Für das Sehnenviereck mit Diagonalen x und z folgt

$$\text{laut der Beziehung (1)} \qquad xz = ad + bc. \tag{5}$$

Für das Sehnenviereck mit Diagonalen y und z folgt

$$\text{laut der Beziehung (1)} \qquad yz = ab + cd. \tag{6}$$

Teilt man diese beiden Beziehungen, (5) und (6) erhalten wir

$$\frac{x}{y} = \frac{ad + bc}{ab + cd},$$

was zu beweisen war. □

8.3 Berechnung der Diagonalen eines Sehnenvierecks

Ist ein Sehnenviereck gegeben (a, b, c und d bekannt), wollen wir die Diagonalen berechnen.

$$\text{Satz von Ptolemäus :} \qquad xy = ac + bd \tag{7}$$

$$\text{Verhältnis der Diagonalen:} \qquad \frac{x}{y} = \frac{ad + bc}{ab + cd} \tag{8}$$

Multipliziert man (7) und (8) folgt $x^2 = \dfrac{(ac + bd) \cdot (ad + bc)}{ab + cd}$. Analog wird y berechnet.

8.4 Definition der Inversion und ihre Eigenschaften

Im folgenden bezeichnen wir die kartesische Ebene mit (E).

DEFINITION – Inversion
Gegeben werden die Punkte $O, M \in (E)$. Existiert $M' \in [OM]$, so daß

$$|OM| \cdot |OM'| = k, \;\; k \in \mathbb{R},$$

so sprechen wir von einer Inversion des Punktes M bezüglich O. □

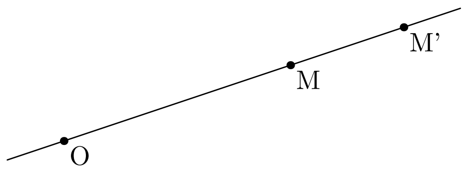

Abbildung 5: Inversion des Punktes M bezüglich O

Satz – Eigenschaften der Inversion
Es sei die Inversion bezüglich dem Punkt O.

1. Zwei nichtkolineare Punkte $A, B \in \mathbf{E} - \{O\}$ und deren entsprechende Iversionspunkte $A', B' \in (E) - \{O\}$ bilden ein Sehnenviereck.
2. Die Inversion einer Geraden die durch den Pol geht ist die Gerade selber.
3. Es sei ein fester Punkt O, zwei Punkte $A, B \in (E) - \{O\}$ Die Punkte A' und B' sind die entsprechenden Inversionspunkte. Beweise, daß
$$|A'B'| = |AB| \cdot \frac{k}{|OA| \cdot |OB|}.$$
4. Die Inversion eines Kreises durch den Pol, ist eine orthogonale Gerade zum Durchmesser durch den Pol.
5. Die Inversion einer beliebigen Geraden ist ein Kreis, der durch den Pol geht und dessen Durchmesser durch den Pol orthogonal zu dieser Geraden steht.
6. Die Inversion eines Kreises, der nicht durch den Pol geht, ist ein Kreis.

□

Bemerkung:

1. Der Punkt O wird Inversionspol genannt. Die Zahl k ist die Inversionspotenz.

2. Je nach Vorzeichen von k, liegen die Punkte zur selben Seite von $O, k > 0$, oder zu verschiedenen Seiten, wenn $k < 0$.

3. $\forall M \in (E) - \{O\}$ existiert ein Inversionspunkt $M' \in (E)$.

4. Ist M' ein Inversionspunkt von M, so ist auch M ein Inversionspunkt von M'.

8.5 Der Satz von Ptolemäus und die Inversion

Wir formulieren noch einmal den *Satz von Ptolemäus* .

Satz – Satz von Ptolemäus
In einem Sehnenviereck ist die Summe der Produkte der gegenüberliegenden Seiten gleich dem Produkt der Diagonalen. □

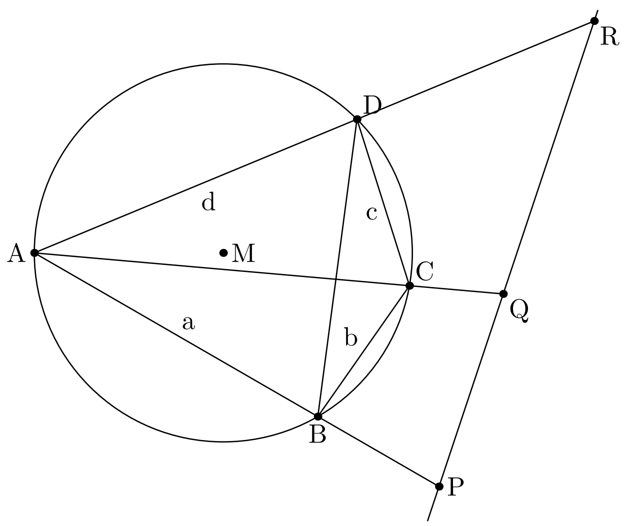

Abbildung 6: Der Satz von Ptolemäus und die Inversion

Beweis: Zuerst fertigen wir eine *Hilfskonstruktion* an in Form einer Geraden (PR), die Inversion von Potenz k des Kreises $M_K(M)$, der durch den Pol A geht. Betrachten wir die Abbildung (6).

Der Beweis reduziert sich auf die Summation zweier Strecken. Wie leicht zu sehen ist, haben wir $|PR| = |PQ| + |QR|$. Wegen der Inversion mit entsprechender Streckenberechnung folgt

$$|BD| \cdot \frac{k}{|AB| \cdot |AD|} = |BC| \cdot \frac{k}{|AB| \cdot |AC|} + |CD| \cdot \frac{k}{|AC| \cdot |AD|}.$$

Nach Kürzen mit k und multiplizieren mit $|AB| \cdot |AC| \cdot |AD|$ der Beziehung, erfolgt die Behauptung. Wie zu sehen ist, eine sehr einfache Geschichte □

Literatur

[1] J. Hadamard: Leçon de Géométrie élémentaire. Libraire Armand Colin, Paris 1947.