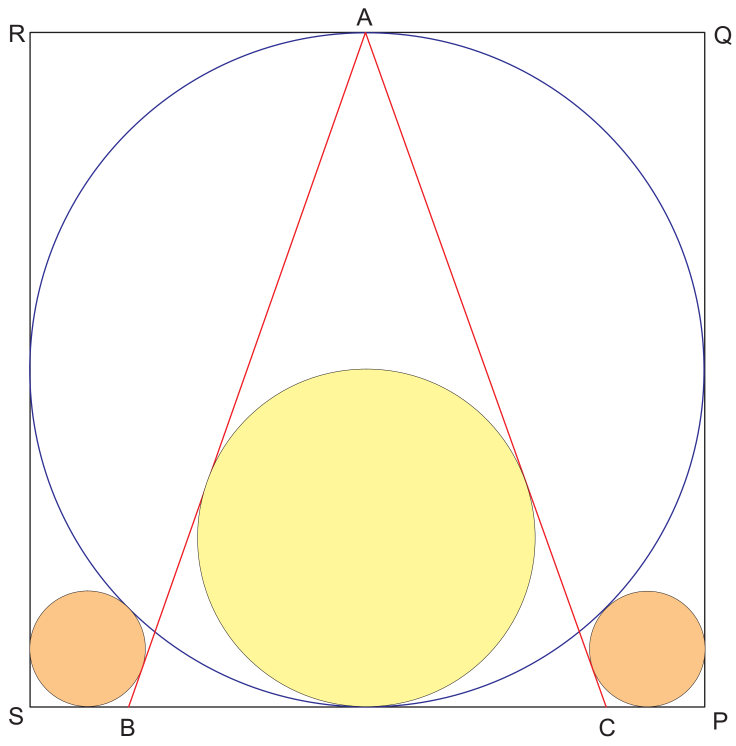
San-Gaku

Aufgaben aus der japanischen Tempelgeometrie mit ausführlichen Lösungsweg

Ingmar Rubin, Berlin



Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Der Beitrag beschäftigt sich mit geometrischen Problemen die im deutschsprachigen Raum bisher wenig Verbreitung gefunden haben. Die japanischen Tempelgeometrie entstand etwa zum Ende des 16 Jh. als Japan sich einer Phase der Isolation von der westlichen Welt befand. Sie entstanden als eine Art intellektueller Zeitvertreib zwischen Mönchen und Samurai, weniger aus einer wissenschaftlichen Notwenigkeit heraus. Es handelt

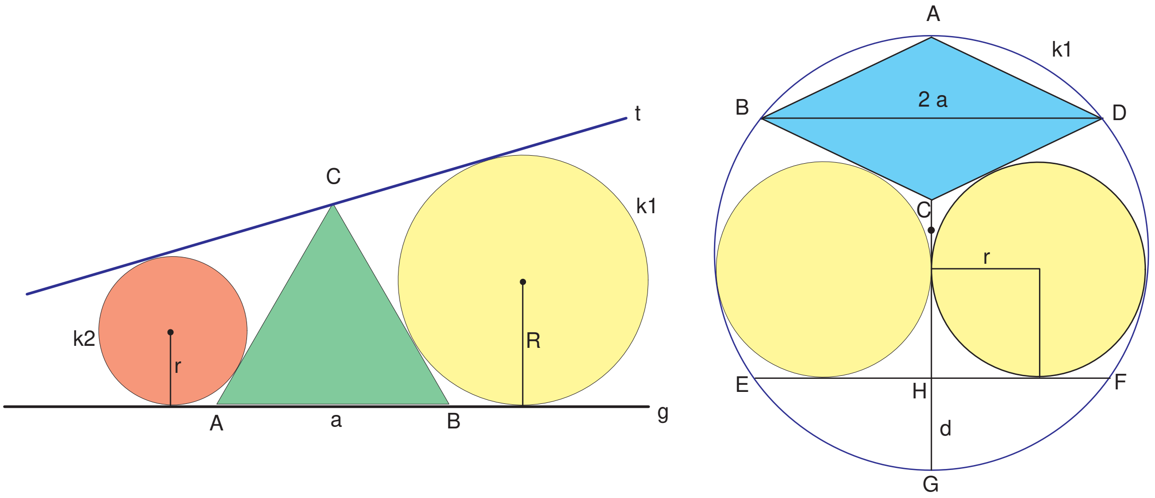


Abbildung 1.1: zwei Beispiele für San-Gaku Probleme

sich um Berührungsprobleme, in denen sich Kreise und Kreisbögen untereinander berühren, Kreise in geometrischen Objekten eingebettet sind oder Dreiecke und Vierecke werden Kreisen bzw. Dreiecken ein beschrieben 1.1.
Die Lösung der Aufgaben erfordert eine Kombination der geometrischen Gesetzmäßigkeiten vom Kreis, Dreieck und Viereck [2]. Die Aufgaben sind von unterschiedlichen Schwierigkeitsgrad. Einige von ihnen sind in die Kategorie *Knobelaufgaben* einzustufen. Zu jedem Problem wird ein ausführlicher Lösungsweg / Lösungsvorschlag gezeigt, der den Leser befähigt weitere Aufgaben selbständig zu lösen.
Vorteilhaft können bei der Lösungsfindung Programme aus der dynamischen Geometrie wie Geogebra [5] oder Zirkel und Lineal [4] zum Einsatz kommen. Beim Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen sind Computeralgebraprogramme (CAS) wie Macsyma, Mathematica oder Maple sinnvoll. Der interessierte Leser findet in [1] eine umfassende Darstellung zur japanischen Tempelgeomtrie einschließlich weiterer, interessanter

Aufgabenstellungen.
'Die Geschichte der Mathematik ist die Geschichte vom Lösen mathematischer Probleme' hat einst David Hilbert in seiner Eröffnungsrede zum Weltmathematiker-kongress 1900 in Paris gesagt. In diesem Sinne wünsche ich dem Leser vergnügliche Stunden beim Lösen der geometrischen Probleme.

1.1 Historischer Hintergrund

Während der Edo Zeit (1603-1867), benannt nach der damaligen Hauptstadt, war Japan von den Einflüssen der westlichen Welt abgeschnitten. In dieser Zeit der selbst auferlegten Isolation schufen wissenschaftlich denkende Menschen aller Klassen zahlreiche Theoreme in euklidischer Geometrie. Diese Theoreme erschienen als wunderbar farbige Zeichnungen auf hölzernen Tafeln. Die Tafeln hingen unter den Dächern von Buddhisten, in Tempeln und Shinto Schreinen. Viele von ihnen zeigen eine außergewöhnliche Schönheit und könnten für Kunst gehalten werden.

Die Tafel wurde ein Sangaku (gesprochen San-Gaku)genannt, was soviel wie Mathe-

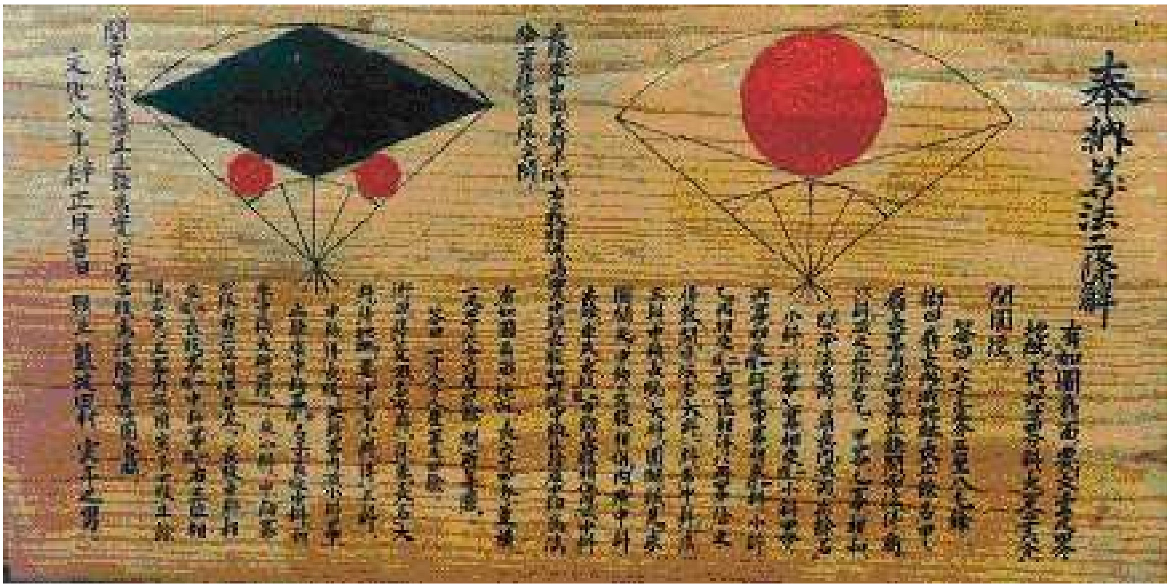


Abbildung 1.2: Sangaku-Tafel1

matiktafel auf japanisch bedeutet. Viele Geometer widmeten ein Sangaku ihrem Gott als Dank für die Entdeckung eines Theorems. Der Beweis des vorgeschlagenen Theorems wurde selten gegeben. Dies wurde als eine Herausforderung für andere Geometer interpretiert, 'seht her, ob ihr dies beweisen könnt'. In zweihundert Jahren sind einige Schreine und Tempel verlassen oder zerstört worden, und damit auch die Sangaku-Tafeln. Heute existieren noch 820 Sangaku's über Japan verteilt. Im Internet findet man unter [6] eine Landkarte mit japanischen Städten und den dort gefundenen Sangaku-Tafeln.

Abbildung 1.3: Sangaku-Tafel2

1.2 Ein Satz aus der Kreisgeometrie

Bevor wir mit der Lösung von Sangaku Problemen beginnen, wollen wir einen einfachen Satz aus der Kreisgeometrie wiederholen. Er wird sich bei der Lösungsfindung als äußerst nützlich und effektiv erweisen. **Satz 1** Sei k ein Kreis mit Mittelpunkt in M und Radius

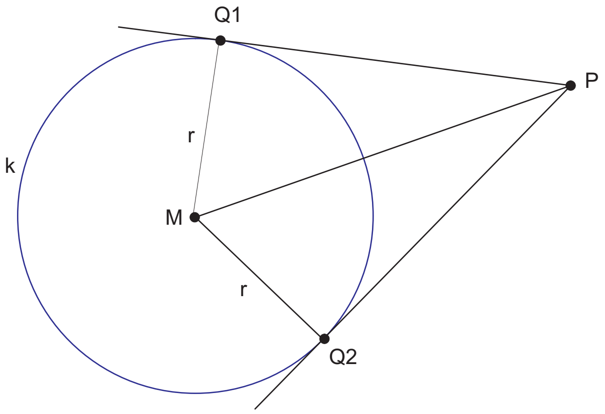


Abbildung 1.4: Satz vom gemeinsamen Tangentenabschnitt

r. Sei P ein Punkt außerhalb von k, d.h. $\overline{MP} > r$. Von P werden die Tangenten an k gelegt. Die Berührungspunkte auf k seien Q_1 und Q_2. Es gilt nun stets $\overline{PQ_1} = \overline{PQ_2}$, d.h. die Länge der Tangentenabschnitte von einem äußeren Punkt an einen Kreis sind stets gleich lang.
Der Beweis folgt unmittelbar, wenn man sich die Strecke $\overline{MP}$ einzeichnet und die Dreiecke MQ_1P und MQ_2P betrachtet (Abb. 1.4). Die Dreiecke MPQ_1 und MPQ_2 besitzen beide einen rechten Winkel und stimmen in zwei Seiten überein. Sie sind zueinander kongruent.
Für die Lösung der folgenden Aufgaben werden neben dem Satz vom gemeinsamen Tangentenabschnitt benötigt:

- Satz des Pythagoras,
- Änhlichkeitssatz in Dreiecken (zwei identische Innenwinkel),
- Sehnensatz,
- Sehnen-Tangentensatz,
- Sekantensatz,
- Satz des Apollonius.

1.3 Anwendung des Satzes vom gemeinsamen Tangentabschnitt

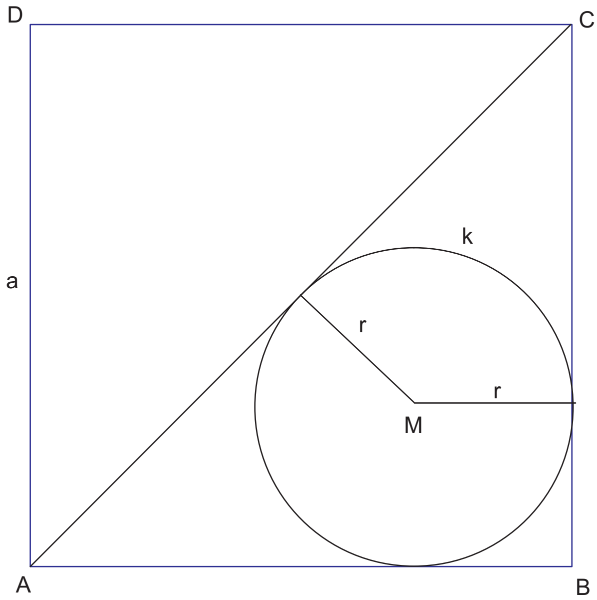


Abbildung 1.5: Skizze zur Aufgabenstellung 1

Wir beginnen unseren Exkurs in das Reich der Tempelgeometrie mit einem einfachen Problem. In einem Quadrat ist die Diagonale eingezeichnet sowie ein Kreis der zwei Seiten des Quadrates und die Diagonale in je einem Punkt berührt. Bestimme den Radius r vom Kreis, wenn die Seitenlänge des Quadrates a gegeben ist.

Lösungsvorschlag

Die Länge der Diagonalen im Quadrat $ABCD$ beträgt:

$$\overline{AC} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2} \tag{1.1}$$

Die Tangentenabschnitte $\overline{CE}$ und $\overline{CF}$ vom Punkt C an den Kreis k sind gleich lang (siehe Satz 1). Die Strecke $\overline{CF}$ entspricht der halben Diagonalen $\overline{AC}$. Die Länge von $\overline{CE}$ ergibt sich aus der Differenz $a - r$.

$$\overline{CE} = \overline{CF} \quad \rightarrow \quad a\,\frac{\sqrt{2}}{2} = a - r \quad \rightarrow \quad r = a\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) \tag{1.2}$$

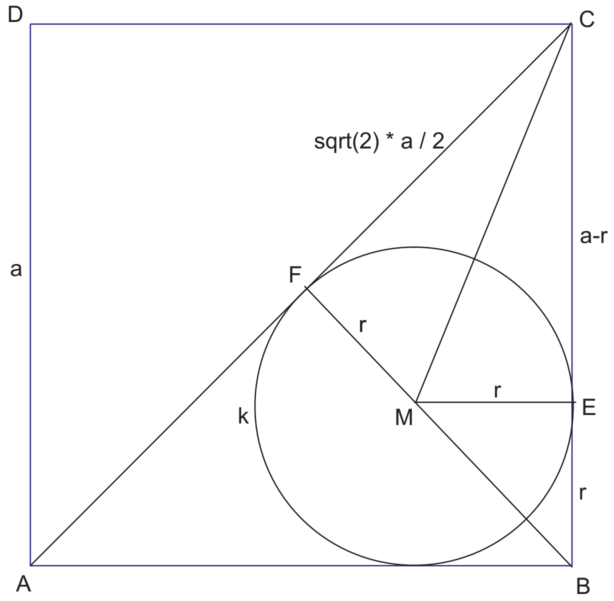


Abbildung 1.6: Lösungsskizze zur Aufgabe 1

Natürlich hätte man diese Aufgabe auch so lösen können:

$$\overline{BM} + \overline{MF} = \overline{BF} \quad \rightarrow \quad \sqrt{2}\,r + r = \frac{a\sqrt{2}}{2} \tag{1.3}$$

oder über die Formel vom Inkreisradius :

$$\Delta ACB = r \cdot s \quad \rightarrow \quad \frac{a^2}{2} = r \cdot \frac{a + a + \sqrt{2}\,a}{2} \tag{1.4}$$

Das folgenden Kapitel enthält eine kleine Auswahl der unzähligen Probleme aus der japanischen Tempelgeometrie. Der Schwierigkeitsgrad variiert. Die mit einem Stern gekennzeichneten Aufgaben sind mittelschwer und die Probleme mit zwei Sternen sind echte Knobelaufgaben. Im Lösungsteil wird eine mögliche Lösungsvariante vorgestellt. Es empfiehlt sich zu jeder Aufgabenstellung eine erweiterte Skizze anzufertigen, in der man sich zusätzliche Punkte und Strecken einträgt - ähnlich wie im vorangehenden Kapitel gezeigt. Die Verwendung eines Programms der dynamischen Geometrie wie Euklid [3], Zirkel und Lineal [4] oder GeoGebra [5] hilft ebenfalls bei der Lösungsfindung.

2 Kreise und Kreisbögen im Quadrat IV

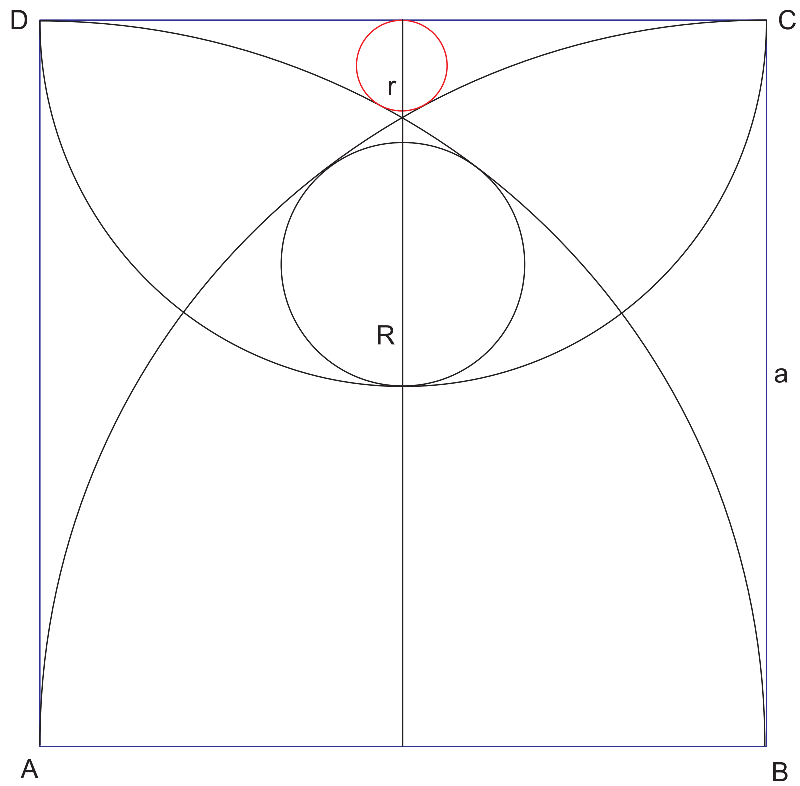


Abbildung 2.1: Skizze zur Aufgabenstellung 2

Bestimme die Radien R, r der beiden Kreise in Abhängigkeit von der Seitenlänge a des Quadrates.

Lösungsweg

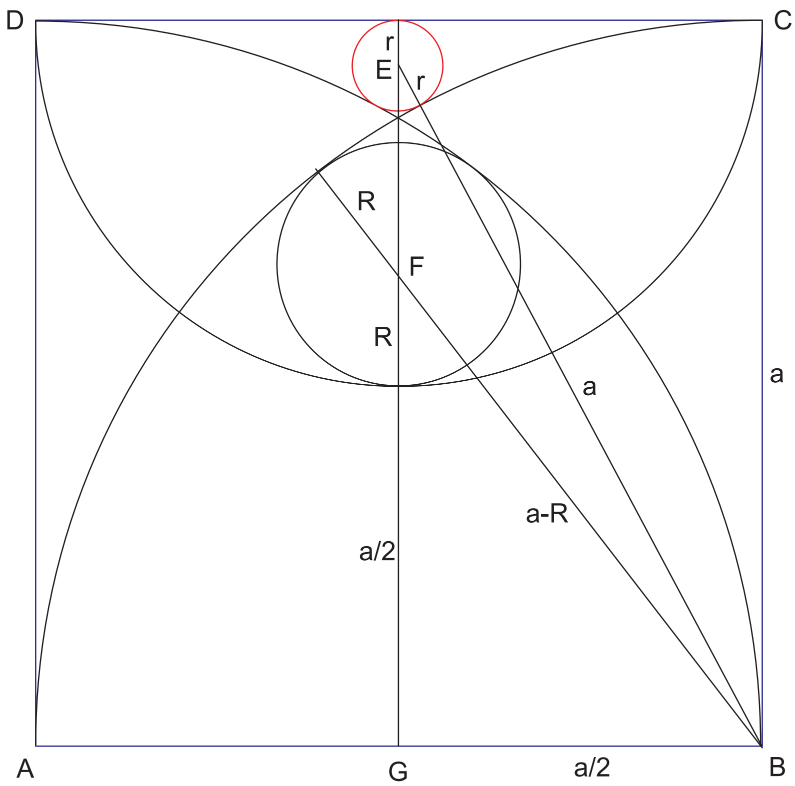


Abbildung 2.2: Skizze zum Lösungsweg

Den oberen, kleinen Kreisradius r bestimmen wir aus dem Dreieck BEG:

$$\triangle BEG: \quad (a+r)^2 = (a-r)^2 + \frac{a^2}{4} \quad \rightarrow \quad r = \frac{a}{16} \tag{2.1}$$

Analog dazu folgt R aus dem Dreieck BFG:

$$\triangle BFG: \quad (a-R)^2 = \left(\frac{a}{2} + R\right)^2 + \frac{a^2}{4} \quad \rightarrow \quad R = \frac{a}{6} \tag{2.2}$$

3 Kreise und Kreisbögen im Quadrat V

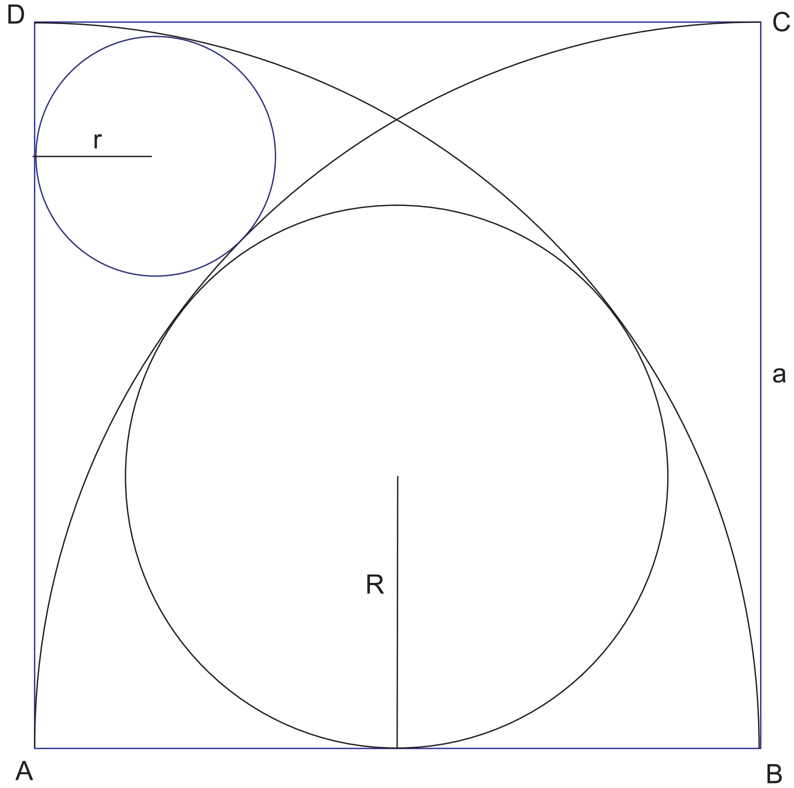


Abbildung 3.1: Skizze zur Aufgabenstellung 3

Bestimme die Radien R, r der beiden Kreise in Abhängigkeit von der Seitenlänge a des Quadrates.

Lösungsweg

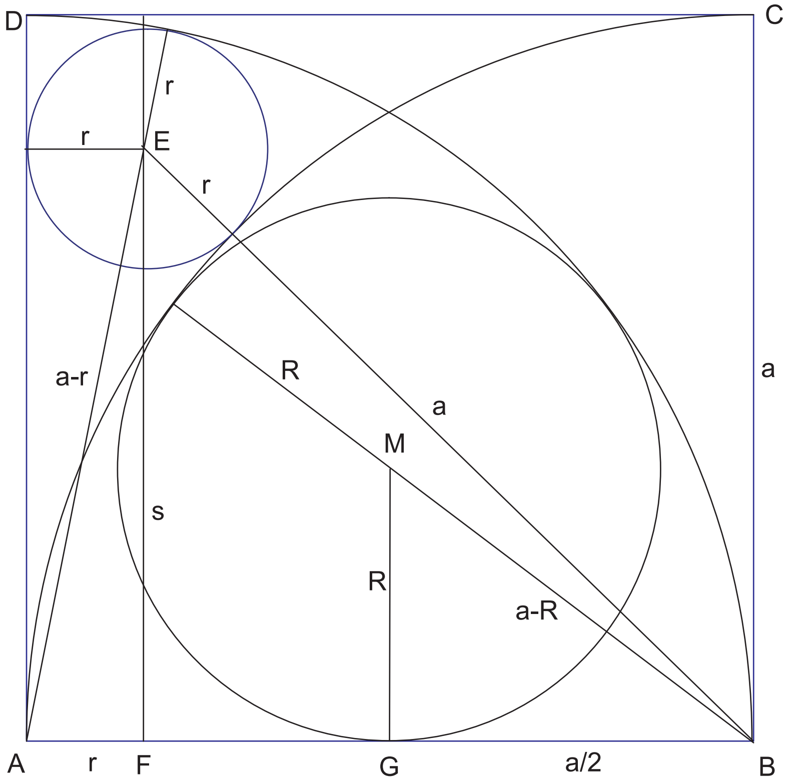


Abbildung 3.2: Skizze zum Lösungsweg

Der große Kreisradius R berechnet sich aus dem Dreieck BMG:

$$\triangle BMG: \quad (a-R)^2 = R^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad R = \frac{3\,a}{8} \tag{3.1}$$

Für die Bestimmung des kleinen Radius sind zwei quadratische Gleichungen notwendig.

$$\triangle BEF: \quad (a+r)^2 = (a-r)^2 + s^2 \quad \rightarrow \quad s^2 = 4\,a\,r \tag{3.2}$$

$$\triangle AEF: \quad (a-r)^2 = r^2 + s^2 \tag{3.3}$$

Das Ergebnis für s aus (3.2) setzen wir in (3.3) ein und erhalten

$$(a-r)^2 = r^2 + 4\,a\,r \quad \rightarrow \quad r = \frac{a}{6} \tag{3.4}$$

4 Kreise und Kreisbögen im Quadrat VI

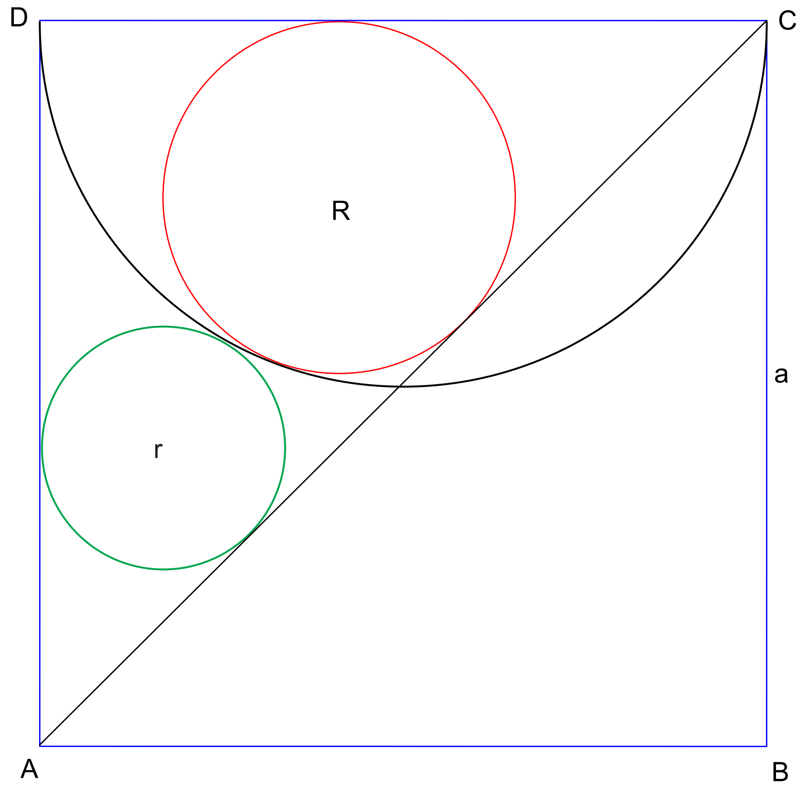


Abbildung 4.1: Skizze zur Aufgabenstellung VI

Bestimme die Radien R, r der beiden Kreise in Abhängigkeit von der Seitenlänge a des Quadrates.

Lösungsweg Teil 1: Bestimmung von R

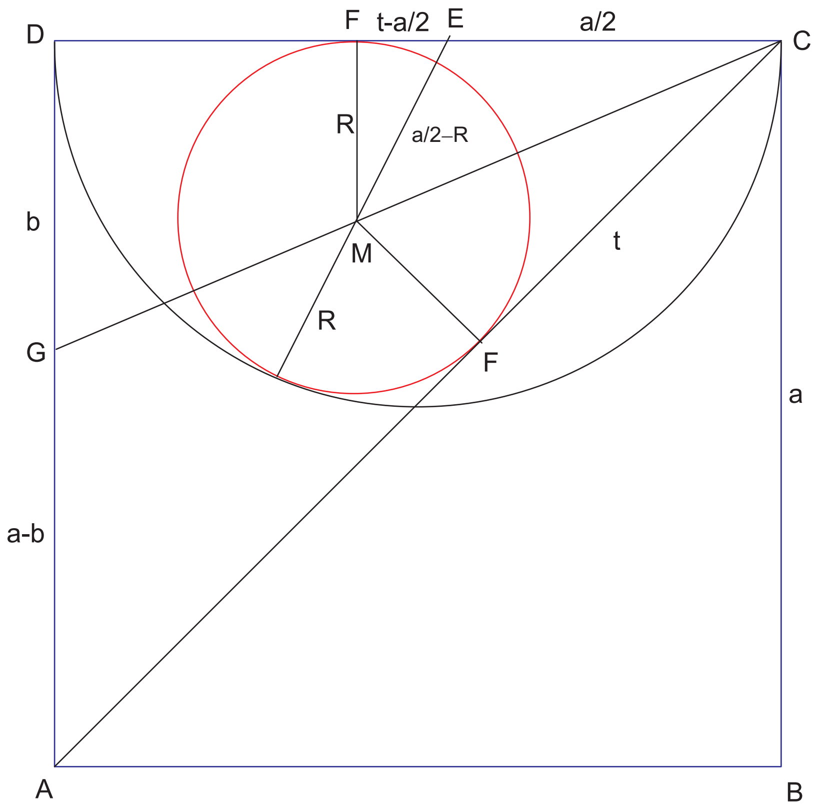


Abbildung 4.2: Skizze zum Lösungsweg Teil I

Bezeichne $t = \overline{CF}$ den Tangentenabschnitt von C an den Kreis. Es gilt dann im Dreieck MFE der Pythagoras:

$$\triangle MFE : \quad \left(\frac{a}{2} - R\right)^2 = \left(t - \frac{a}{2}\right)^2 + R^2 \tag{4.1}$$

Die Strecke $\overline{CG}$ ist die Winkelhalbierende vom Winkel $\sphericalangle ACD$. Es gilt der Satz: Die Winkelhalbierende $\overline{CG}$ teilt die Strecke $\overline{AD}$ im Verhältnis der anliegenden Seiten $\overline{CA}$ und $\overline{CD}$, also:

$$\frac{AG}{GD} = \frac{AC}{CD} \quad \rightarrow \quad \frac{a-b}{b} = \frac{a\sqrt{2}}{a} \quad \rightarrow \quad b = \frac{a}{1+\sqrt{2}} \tag{4.2}$$

Die Dreiecke CGD und CMF sind einander ähnlich und es gilt:

$$\frac{t}{R} = \frac{a}{b} \quad \rightarrow \quad \frac{t}{R} = 1 + \sqrt{2} \quad \rightarrow \quad t = R\,(1+\sqrt{2}) \tag{4.3}$$

Das Ergebnis für t setzen wir in (1) ein und lösen nach R auf:

$$\left(\frac{a}{2} - R\right)^2 = \left(R\,(1+\sqrt{2}) - \frac{a}{2}\right)^2 + R^2 \quad \rightarrow \quad R = a\,\frac{\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} \tag{4.4}$$

Lösungsweg Teil 2: Bestimmung von r

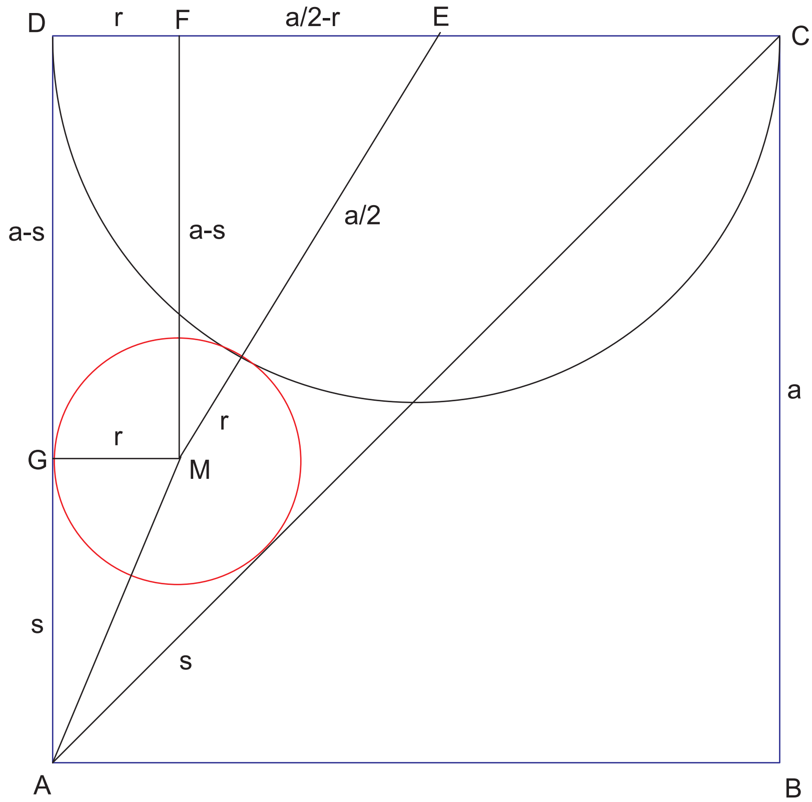


Abbildung 4.3: Skizze zum Lösungsweg Teil 2

Bezeichne $s = \overline{AG}$ den Tangentenabschnitt von A an den Kreis. Es gilt dann im Dreieck MAG der Satz des Pythagoras:

$$\triangle MAG: \quad \left(\frac{a}{2} + r\right)^2 = \left(\frac{a}{2} - r\right)^2 + (a-s)^2 \tag{4.5}$$

Das Verhältnis $s \div r$ haben wir bereits im Aufgabenteil 1 hergeleitet:

$$\frac{s}{r} = 1 + \sqrt{2} \quad \rightarrow \quad s = r\,(1+\sqrt{2}) \tag{4.6}$$

Das Ergebnis für s setzen wir in (4.5) ein und lösen nach r auf:

$$\left(\frac{a}{2}+r\right)^2=\left(\frac{a}{2}-r\right)^2+(a-r\,(1+\sqrt{2}))^2 \tag{4.7}$$

$$r=\frac{a}{3+2\sqrt{2}}=a\,(3-2\sqrt{2}) \tag{4.8}$$

5 Kreise und Kreisbögen im Quadrat VII

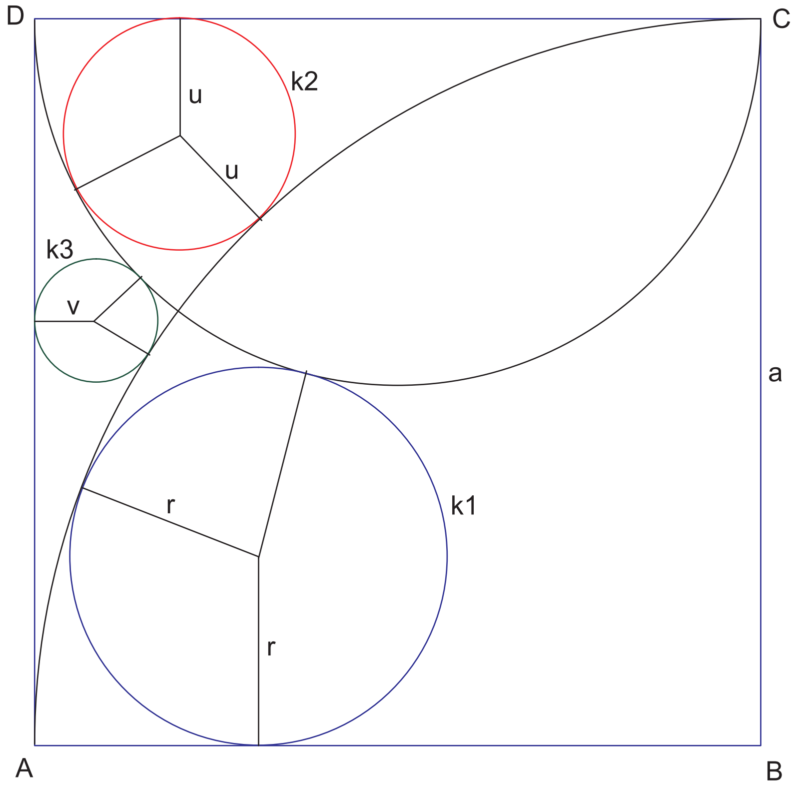


Abbildung 5.1: Skizze zur Aufgabenstellung VIII

Bestimme die Radien r, u, v der drei Kreise in Abhängigkeit von der Seitenlänge a des Quadrates.

Lösungsweg Teil 1: Bestimmung von r

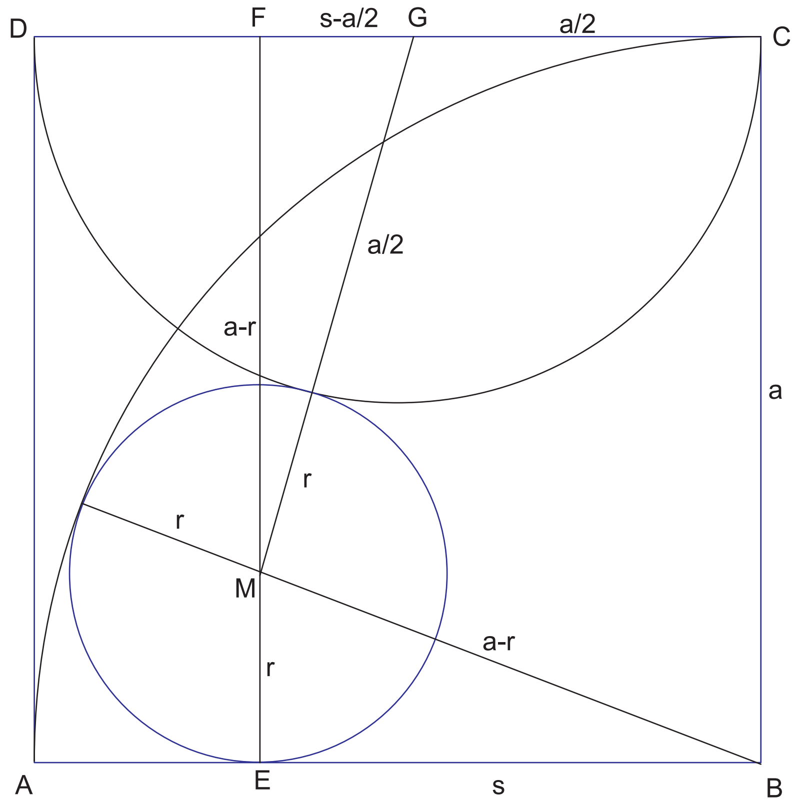


Abbildung 5.2: Skizze zum Lösungsweg Teil I

Bezeichne $s = \overline{BE}$ den Tangentenabschnit von B an den Kreis k_1. Es gilt dann im Dreieck BME der Pythagoras:

$$\triangle BME: \quad (a-r)^2 = r^2 + s^2 \quad \rightarrow \quad s^2 = a\,(a - 2\,r) \tag{5.1}$$

Aus der Berüherung zwischen dem Halbkreis mit Radius $a/2$ und dem Kreis k_1 entsteht das rechtwinklige Dreieck FMG :

$$\triangle FMG: \quad \left(\frac{a}{2} + r\right)^2 = \left(s - \frac{a}{2}\right)^2 + (a-r)^2 \tag{5.2}$$

Das Einsetzen von (5.1) in (5.2) liefert die quadratische Gleichung zur Bestimmung von r:

$$3\,a^2 - 18\,a\,r + 25\,r^2 = 0 \quad \rightarrow \quad r = a\left(\frac{9-\sqrt{6}}{25}\right) \tag{5.3}$$

Lösungsweg Teil 2: Bestimmung von u

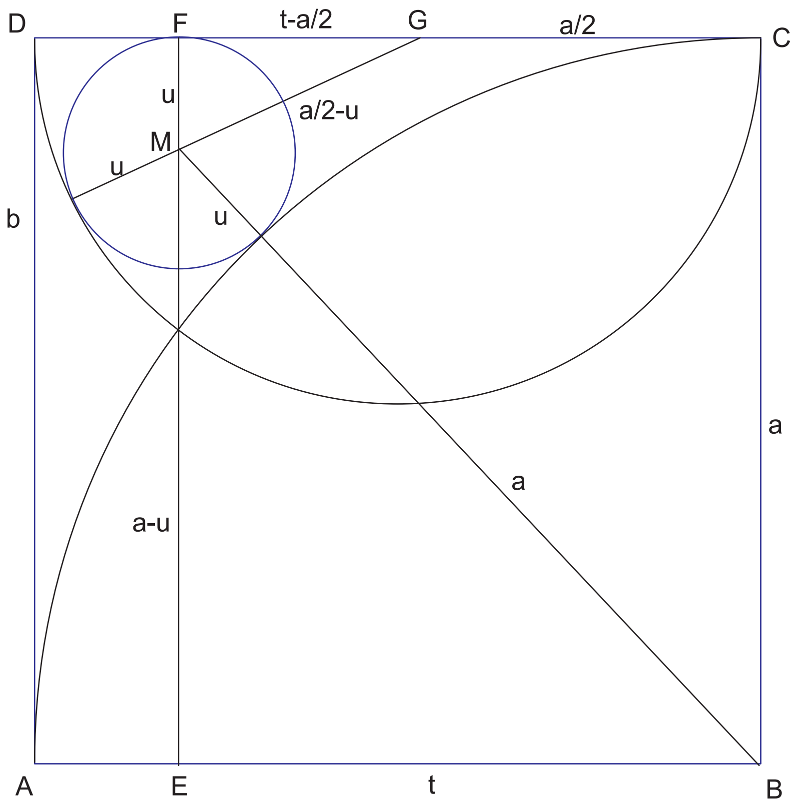


Abbildung 5.3: Skizze zum Lösungsweg Teil II

Bezeichne $t = \overline{CF}$ den Tangentenabschnitt von C an den Kreis k_2. Aus der Berüherung zwischen dem Viertelkreisbogen mit Radius a und k_2 erhalten wir das rechtwinklige Dreieck BME :

$$\triangle BME: \quad (a+u)^2 = (a-u)^2 + t^2 \quad \rightarrow \quad t^2 = 4\,a\,u \tag{5.4}$$

Ein zweites Berüherungdreieck GMF finden wir zwischen k_2 und dem Halbkreisbogen mit Radius $a/2$:

$$\triangle GMF: \quad \left(\frac{a}{2} - u\right)^2 = \left(t - \frac{a}{2}\right)^2 + u^2 \quad \rightarrow \quad t = 5\,u \tag{5.5}$$

Der Vergleich zwischen (5.4) und (5.5) liefert:

$$t^2 = 25\,u^2 = 4\,a\,u \quad \rightarrow \quad u = \frac{4\,a}{25} \tag{5.6}$$

Lösungsweg Teil 3: Bestimmung von v

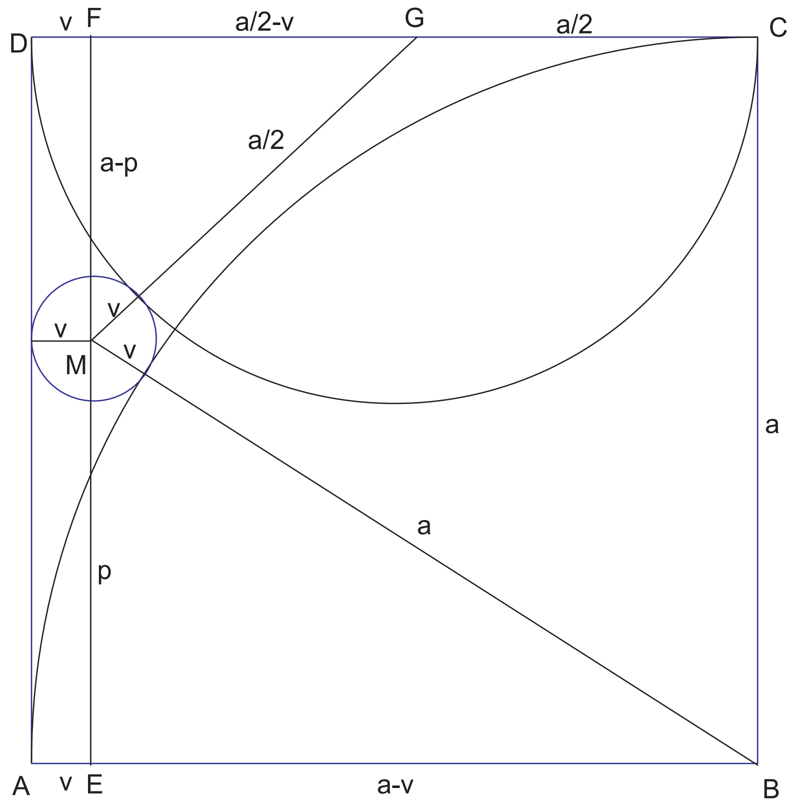


Abbildung 5.4: Skizze zum Lösungsweg Teil 3

Bezeichne $p = \overline{EM}$ den Abstand vom Kreismittelpunkt M zur Grundlinie $\overline{AB}$. Aus der Berüherung zwischen dem Viertelkreisbogen mit Radius a und k_3 erhalten wir das rechtwinklige Dreieck BME:

$$\triangle BME : \quad (a+v)^2 = (a-v)^2 + p^2 \quad \to \quad p^2 = 4\,a\,v \tag{5.7}$$

Ein zweites Berührungdreieck GMF finden wir zwischen k_3 und dem Halbkreisbogen mit Radius $a/2$:

$$\triangle GMF : \quad \left(\frac{a}{2} + v\right)^2 = \left(\frac{a}{2} - v\right)^2 + (a-p)^2 \quad \to \quad (a-p)^2 = 2\,a\,v \tag{5.8}$$

Die Lösung aus (5.7) für p setzen wir in (5.8) ein und erhalten eine quadratische Gleichung zur Bestimmung von v

$$v^2 - 3\,a\,v + \frac{a^2}{4} \quad \to \quad v = \frac{a}{2}\left(3 - \sqrt{8}\right) \tag{5.9}$$

6 Zwei Kreise am gleichseitigen Dreieck

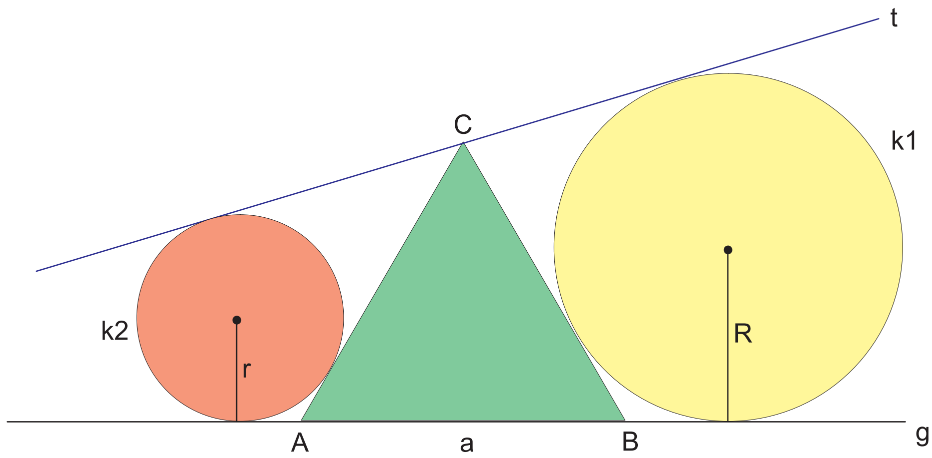


Abbildung 6.1: Nagano Prefecture, Problem 7.1

Der Kreis $k_1(R)$, das gleichseitige Dreieck ABC und der Kreis $k_2(r)$ liegen auf der Geraden g. Bestimme die Seitenlänge a vom gleichseitigen Dreick ABC wenn die gemeinsame Tangente t von k_1 und k_2 durch den Punkt C läuft (Abbildung 6.1).

Lösungsvorschlag

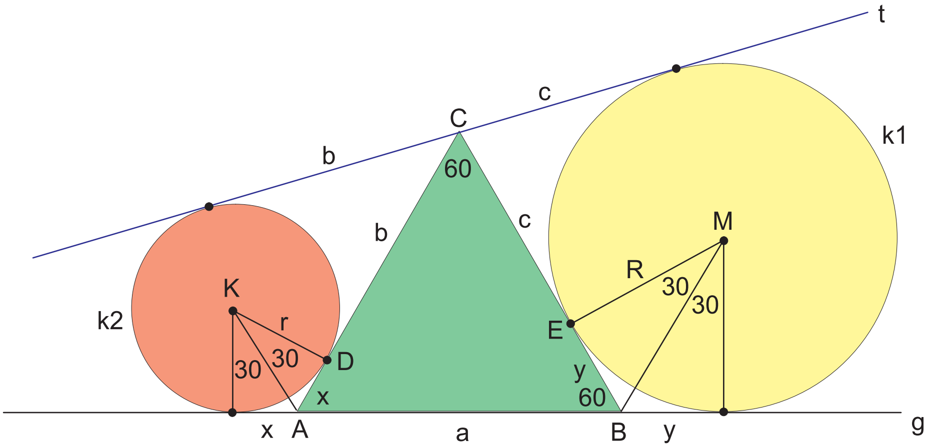


Abbildung 6.2: Skizze zur Lösung

Für das Dreieck AKD gilt:

$$\triangle AKD: \quad \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{r} \tag{6.1}$$

Analog gilt für das Dreieck BME:

$$\triangle BME: \quad \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{y}{R} \tag{6.2}$$

Die Seite $\overline{AC}$ setzt sich wie folgt zusammen:

$$a = x + b \tag{6.3}$$

und Seite $\overline{BC}$:

$$a = y + c \tag{6.4}$$

Die Tangentenabschnitte zwischen den Kreisen k_1 und k_2 müssen gleich lang sein:

$$x + a + y = b + c \tag{6.5}$$

Die Auflösung der Gleichungen (6.1) bis (6.5) ergibt:

$$a = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (r + R)$$

7 Ein Kreisfächer

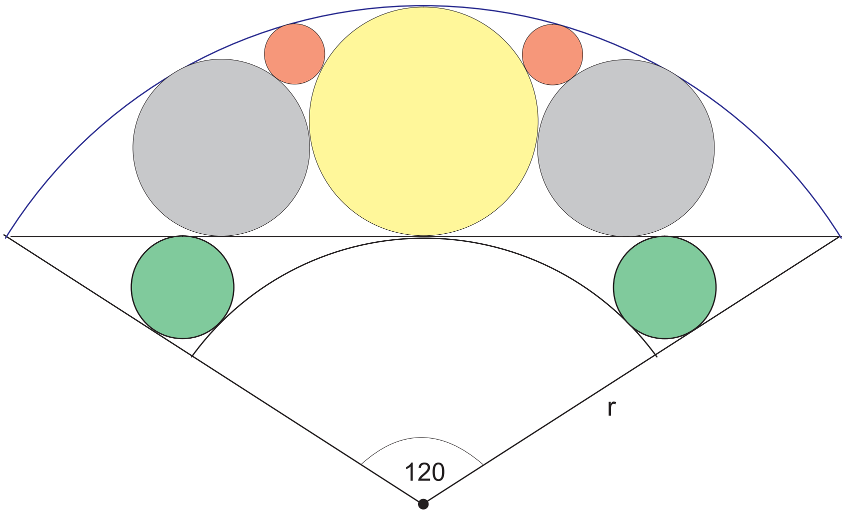


Abbildung 7.1: Kinjiro Takasaka, Isaniwa Shrine in Ehime Prefecture

Gegeben sei ein Kreissektor mit einem Öffnungswinkel von 120° und dem Radius r. Dem Kreissektor seien 7 Kreise einbeschrieben, wie es in Abbildung 7.1 gezeigt ist. Bestimme die Radien aller Kreise in Abhängigkeit vom Kreissektorradius r. Sei c der Radius vom roten Kreis und d der Radius vom grünen Kreis. Zeige das dann gilt:

$$c = d \cdot \frac{\sqrt{3072} + 62}{193} \tag{7.1}$$

Lösungsvorschlag

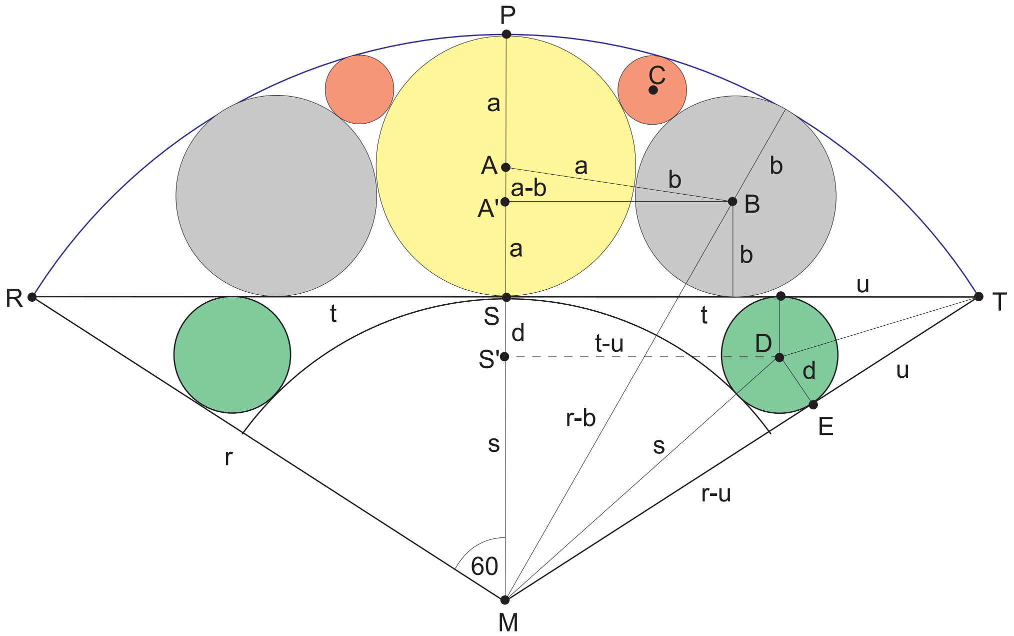


Abbildung 7.2: Skizze zur Bestimmung von a, b, d

Im rechtwinkligen Dreieck MST mit dem Winkel $\sphericalangle SMT = 60°$ gilt:

$$s = r \cdot \cos 60° = \frac{r}{2}, \quad t = r \cdot \sin 60° = \frac{r\sqrt{3}}{2} \tag{7.2}$$

Aus der Strecke $r = \overline{MP}$ können wir den Radius a bestimmen:

$$r = s + 2\,a \quad \rightarrow \quad a = \frac{r-s}{2} = \frac{r}{4} \tag{7.3}$$

Im Berührungsdreieck $MA'B$ gilt:

$$\triangle MA'B: \quad (r-b)^2 = (s+a)^2 + 4\,a\,b \quad \rightarrow \quad b = \frac{3\,r}{16} \tag{7.4}$$

Der *Satz des Pythagoras* liefert für:

$$\triangle MS'D: \quad (s+d)^2 = (s-d)^2 + (t-u)^2 \quad \rightarrow \quad \frac{r\sqrt{3}}{2} - u = \sqrt{2\,r\,d} \tag{7.5}$$

und

$$\triangle MDE: \quad (s+d)^2 = d^2 + (r-u)^2 \quad \rightarrow \quad \frac{r^2}{4} + r\,d = (r-u)^2 \tag{7.6}$$

Aus den Gleichungen (7.5) und (7.6) erhalten wir für d, u:

$$d = \frac{3\,(2-\sqrt{3})\,r}{2\,(2+\sqrt{3})}, \qquad u = \frac{3\,r}{2\,(2+\sqrt{3})} \tag{7.7}$$

Bestimmung von Radius c

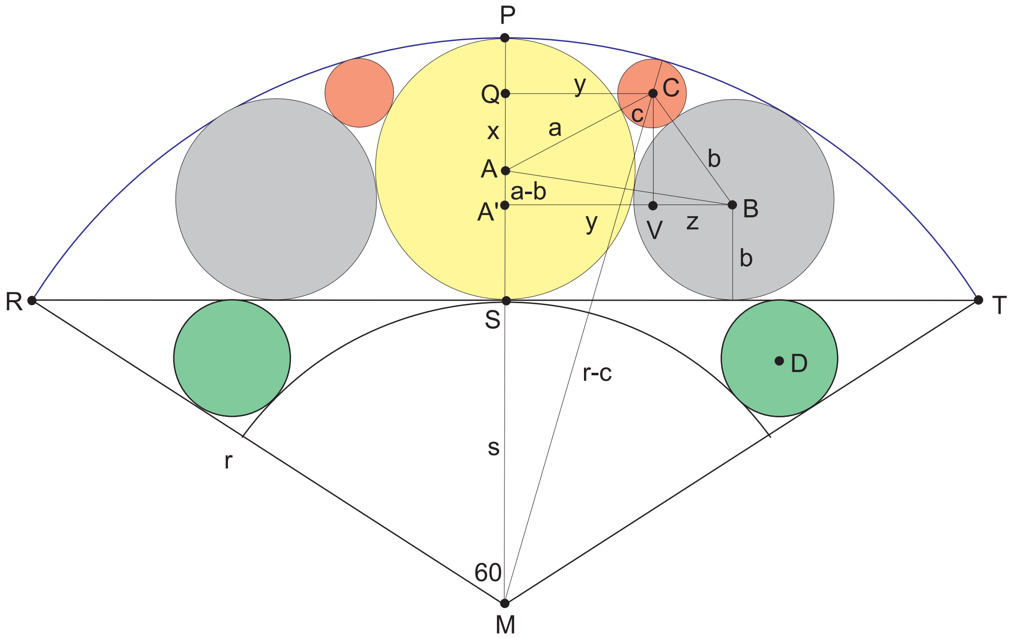


Abbildung 7.3: Skizze zur Bestimmung von Radius c

Es ergeben sich mit dem *Satz des Pythagoras* die folgende Gleichungen:

$$\triangle MQC: \quad (r-c)^2 = (s+a+x) + y^2 \tag{7.8}$$

$$\triangle ABA': \quad y + z = 2\sqrt{a\,b} \tag{7.9}$$

$$\triangle CVB: \quad (c+b)^2 = z^2 + (x+a-b)^2 \tag{7.10}$$

$$\triangle AQC: \quad x^2 + y^2 = (a+c)^2 \tag{7.11}$$

Nach Auflösung erhalten wir:

$$c = \frac{3}{193}\left(25 - 12\sqrt{3}\right) r, \qquad x = \frac{1}{772}\left(-307 + 240\sqrt{3}\right) r,$$
$$y = \frac{2}{193}\left(3 + 14\sqrt{3}\right) r, \qquad z = \frac{3}{772}\left(-8 + 27\sqrt{3}\right) r$$

und schließlich:

$$\frac{c}{d} = \frac{2\,(2+\sqrt{3})}{193\,(2-\sqrt{3})}\left(25 - 12\sqrt{3}\right) = \frac{62 + 32\,\sqrt{3})}{193} = \frac{62 + \sqrt{3 \cdot 1024})}{193} \tag{7.12}$$

8 Drei Kreise im Rechteck

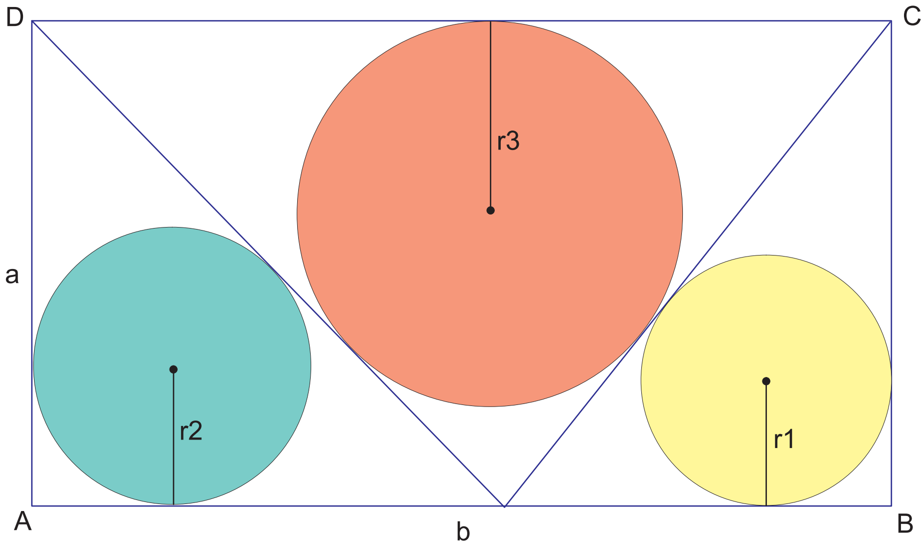


Abbildung 8.1: Skizze zur Aufgabe

Gegeben sei drei Kreise die einem Rechteck $ABCD$ einbeschrieben sind, wie in Abbildung 8.1 dargestellt. Berechne die Seitenlängen a, b vom Rechteck, wenn die Radien wie folgt gegeben sind:

- $r_1 = 1\,cm, \quad r_2 = 2\,cm, \quad r_3 = 3\,cm,$
- $r_1 = 2\,cm, \quad r_2 = 3\,cm, \quad r_3 = 4\,cm$

Lösungsvorschlag

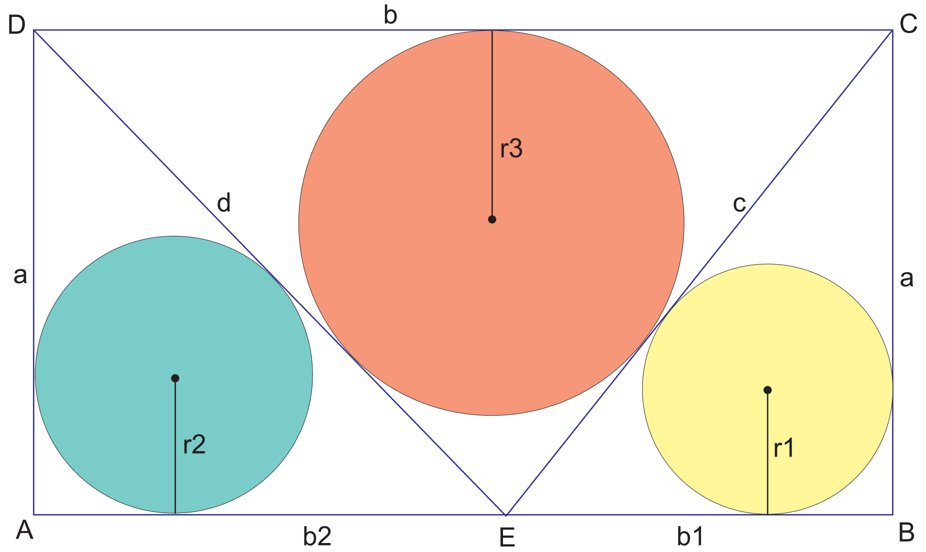


Abbildung 8.2: Berechnung der Radien s und t

Allgemein berechnet sich der Inkreisradius im Dreieck aus:

$$r_i = \frac{2\,A}{a+b+c} \tag{8.1}$$

Für das rechtwinklige Dreieck EBC erhalten wir:

$$\triangle EBC: \quad r_1 = \frac{a\,b_1}{a+b_1+c} \tag{8.2}$$

und für Dreieck DAE:

$$\triangle DAE: \quad r_2 = \frac{a\,b_2}{a+b_2+d} \tag{8.3}$$

Für die Summe der Abschnitte b_1, b_2 gilt:

$$b = b_1 + b_2 \tag{8.4}$$

und mit dem Satz des Pythagoras:

$$b_1 = \sqrt{c^2 - a^2}, \quad b_2 = \sqrt{d^2 - a^2} \tag{8.5}$$

Die Fläche vom Dreieck CED erhalten wir aus der Differenz:

$$A_{CED} = a\,b - \frac{1}{2}\,a\,b_1 - \frac{1}{2}\,a\,b_2 = \frac{1}{2}\,a\,b \tag{8.6}$$

$$\triangle CED: \quad r_3 = \frac{a\,b}{b+c+d} \tag{8.7}$$

Mit einem CAS (Mathematica) lösen wir die Gleichungen (8.2) ... (8.7) nach a, b, c, d auf:

$$a = \frac{2\,r_1 r_2}{r_1 + r_2 - r_3}$$

$$b = r_2 + r_1\left(1 + r_2\left(\frac{1}{-r_1 + r_3} + \frac{1}{-r_2 + r_3}\right)\right)$$

$$c = -\frac{r_2\,({r_1}^2 + (r_2 - r_3)^2)}{(r_2 - r_3)\,(r_1 + r_2 - r_3)}$$

$$d = -\frac{r_1\,({r_2}^2 + (r_1 - r_3)^2)}{(r_1 - r_3)(r_1 + r_2 - r_3)}$$

Das erste numerischen Beispiel:

$$r_1 = 1\,cm, \qquad r_2 = 2\,cm, \qquad r_3 = 3\,cm \tag{8.8}$$

führt auf eine Division durch Null für a, b - siehe Zählerterm. Für das zweite Beispiel

$$r_1 = 2\,cm, \qquad r_2 = 3\,cm, \qquad r_3 = 4\,cm \tag{8.9}$$

erhält man

$$a = 12\,cm, \quad b = 14\,cm, \quad c = 15\,cm, \quad d = 13\,cm \tag{8.10}$$

9 Eine gemeinsame Tangente

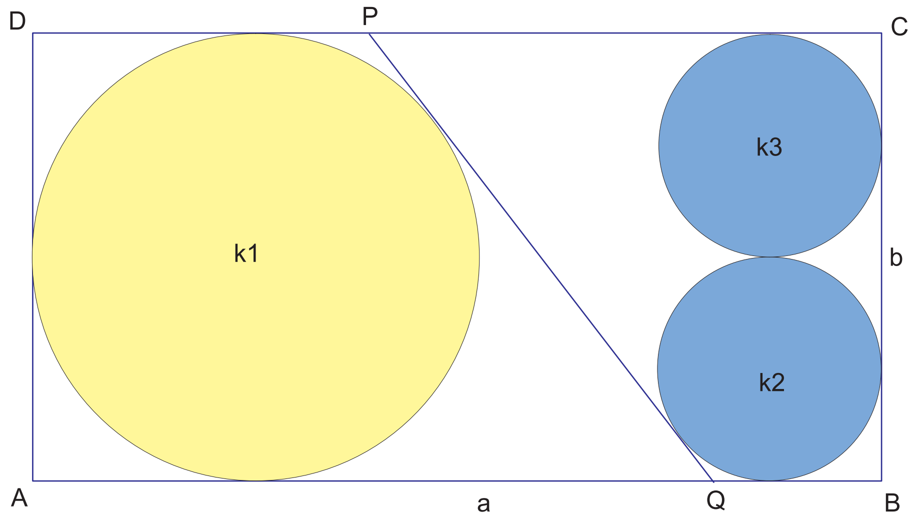


Abbildung 9.1: Nagano Prefekture, Problem 40.6

Einem Rechteck $ABCD$ ist der Kreis k_1 und die beiden gleich großen Kreise k_2, k_3 einbeschrieben, wie in Abbildung 9.1 gezeigt. Die Strecke $\overline{PQ}$ berührt den Kreis k_1 und den Kreis k_2 in je einem Punkt. Berechne die Länge der Strecke $\overline{PQ}$ in Abhängigkeit von den Seitenlängen $a = \overline{AB}$ und $b = \overline{BC}$ des Rechtecks.

Lösungsvorschlag

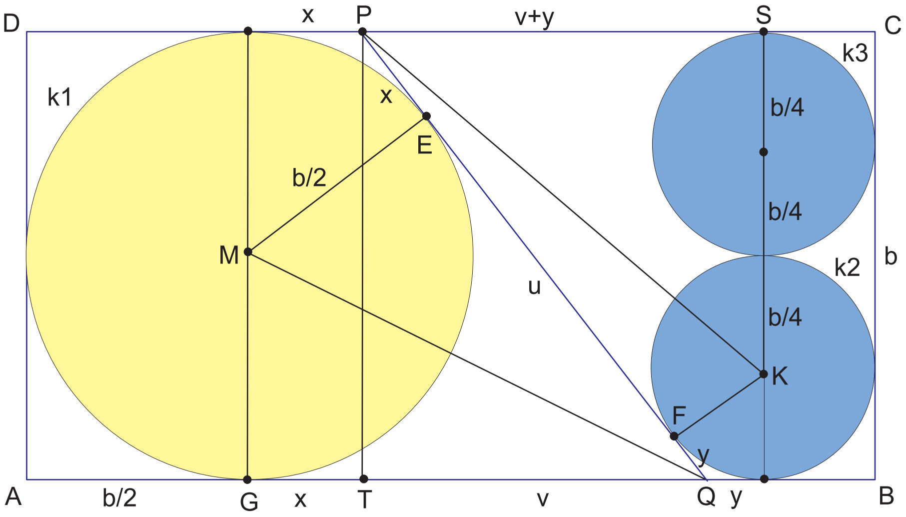


Abbildung 9.2: Skizze zur Lösung

Die Strecken- und Punktebezeichner seien entsprechend Abbildung 9.2 gewählt. Die Radien der Kreise folgen unmittelbar aus der Berührung mit den Rechteckseiten:

$$R = \frac{b}{2}, \qquad r = \frac{b}{4} \tag{9.1}$$

Die Tangentenabschnitte vom Punkt Q an den Kreis k_1 sind gleich lang:

$$k_1 : \quad v + x = y + u \tag{9.2}$$

Für die Seite $a = \overline{AB}$ gilt:

$$\overline{AB} : \quad a = \frac{b}{2} + x + v + y + \frac{b}{4} \tag{9.3}$$

Im rechtwinligen Dreieck PQT gilt der Satz des Pythagoras:

$$\triangle PTQ : \quad b^2 + v^2 = (x + u + y)^2 \tag{9.4}$$

Analog gilt für Dreieck PKS und PFK:

$$\triangle PKS : \quad (v + y)^2 + \frac{9\,b^2}{16} = \frac{b^2}{16} + (u + x)^2 \tag{9.5}$$

Die Auflösung der Gleichungen (9.2) bis (9.5) ergibt in Mathematica:

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{1}{8}\left(-4\,a + 3\,b - 3\,\sqrt{16\,a^2 - 24\,a\,b + b^2}\right)\\
u_1 &= -\frac{1}{4}\sqrt{16\,a^2 - 24\,a\,b + b^2}\\
x_1 &= \frac{1}{4}\left(4\,a - 3\,b + \sqrt{16\,a^2 - 24\,a\,b + b^2}\right)\\
y_1 &= \frac{1}{8}\left(4\,a - 3\,b + \sqrt{16\,a^2 - 24\,a\,b + b^2}\right)\\
v_2 &= \frac{1}{8}\left(-4\,a + 3\,b + 3\,\sqrt{16a^2 - 24\,a\,b + b^2}\right)\\
u_2 &= \frac{1}{4}\sqrt{16\,a^2 - 24\,a\,b + b^2}\\
x_2 &= a - \frac{3\,b}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{16\,a^2 - 24\,a\,b + b^2}\\
y_2 &= \frac{1}{8}\left(4\,a - 3\,b - \sqrt{16\,a^2 - 24\,a\,b + b^2}\right)
\end{aligned}$$

Für die Lösung der Aufgabe kommt nur die zweite Lösungsmenge in Betracht, da alle gesuchten Strecken positiv sein müssen. Die Länge der Strecke $\overline{PQ}$ beträgt demnach:

$$\overline{PQ} = x_2 + u_2 + y_2 = \frac{1}{8}\left(12\,a - 9\,b - \sqrt{16\,a^2 - 24\,a\,b + b^2}\right) \tag{9.6}$$

10 Dreieck, Quadrat und Kreis

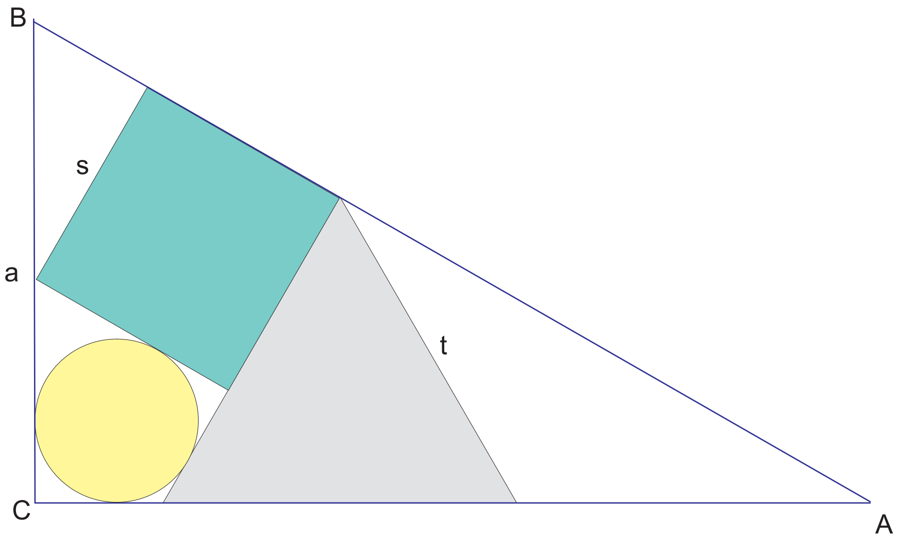


Abbildung 10.1: Sangaku Problem: Dreieck, Quadrat und Kreis

Einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit der Seitenlänge $a = BC$ sind ein Kreis, ein Quadrtat und ein gleichseitiges Dreick der Seitenlänge t einbeschrieben (Abbildung 10.1). Bestimme die Seitenlänge t vom gleichseitigen Dreieck in Abhängigkeit von a.

Lösungsvorschlag

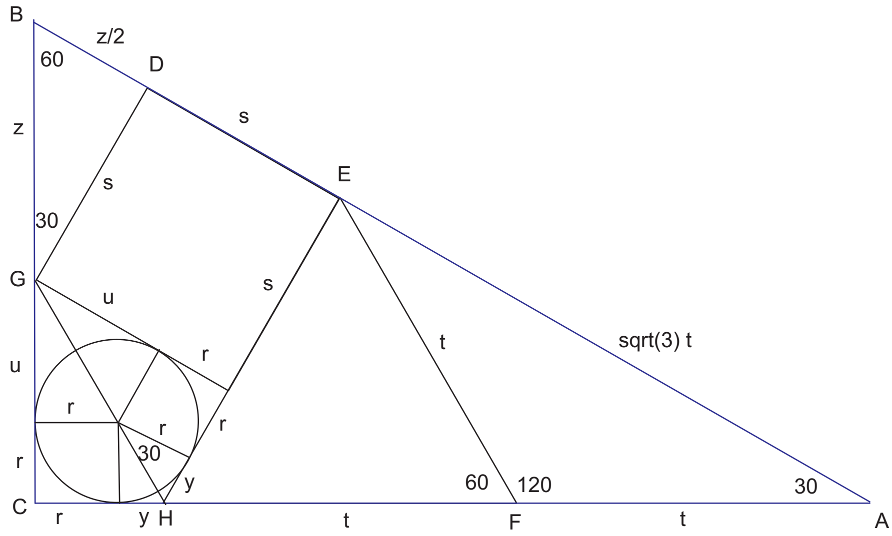


Abbildung 10.2: Skizze zur Lösung

Die Strecken- und Punktebezeichner seien wie in Abbildung 10.1 gewählt. Der Winkel $\sphericalangle AFE$ beträgt 120°, da der Innenwinkel im gleichseitigen Dreieck 60° beträgt. Damit ist das Dreieck AFE gleichschenklig und wir können mit dem Kosinussatz die Länge AE berechnen:

$$AE^2 = t^2 + t^2 - 2\,t^2 \cos 120^\circ \quad \to \quad AE = \sqrt{3}\,t \tag{10.1}$$

Im rechtwinkligen Dreieck BDG sind die Innenwinkel bekannt und wir erhalten:

$$\frac{s}{z} = \cos 30^\circ, \quad BD = z \sin 30^\circ = \frac{z}{2} \tag{10.2}$$

Seite $a = BC$ setzt sich wie folgt zusammen:

$$BC = a = r + u + z \tag{10.3}$$

Die Seite $t = EH$ besteht aus den Abschnitten:

$$t = s + r + y \tag{10.4}$$

Im Dreieck GCH erhlaten wir:

$$\frac{r+y}{r+u} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \tag{10.5}$$

Schließlich gilt im rechtwinkligen Dreick ABC der Satz des Phytagoras:

$$a^2 + (r + y + +2\,t)^2 = \left(s + \sqrt{3}\,t + \frac{z}{2}\right)^2 \tag{10.6}$$

Die Auflösung der Gleichungen ergibt:

$$u = -3a + 2\sqrt{3}a - r, \qquad y = 2a - \sqrt{3}a - r \tag{10.7}$$

$$s = -3a + 2\sqrt{3}a, \quad z = -2\left(-2a + \sqrt{3}a\right), \quad t = -a + \sqrt{3}a \tag{10.8}$$

11 Ein Stehaufmännchen

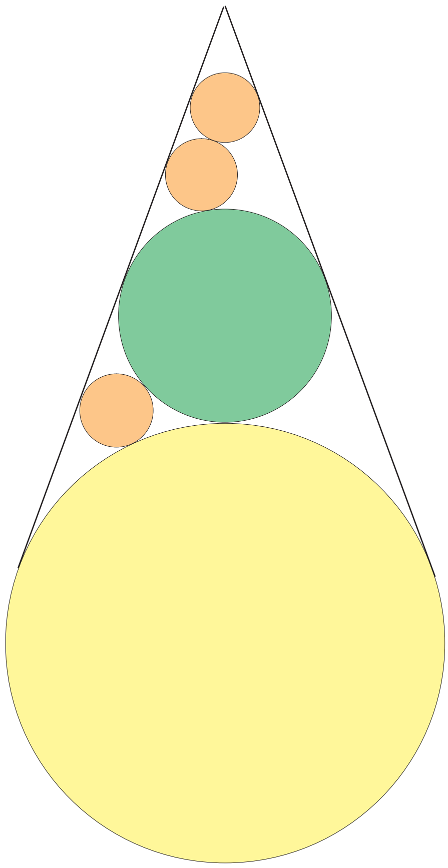


Abbildung 11.1: Hiroshi Okumura, Saitama prefectural library 1969

Fünf Kreise mit drei unterschiedlichen Radien berühren sich wie in Abbildung 11.1 gezeigt. Gegeben ist der Radius des größten Kreises. Bestimme den Radius des mittleren Kreises.

Lösungsvorschlag

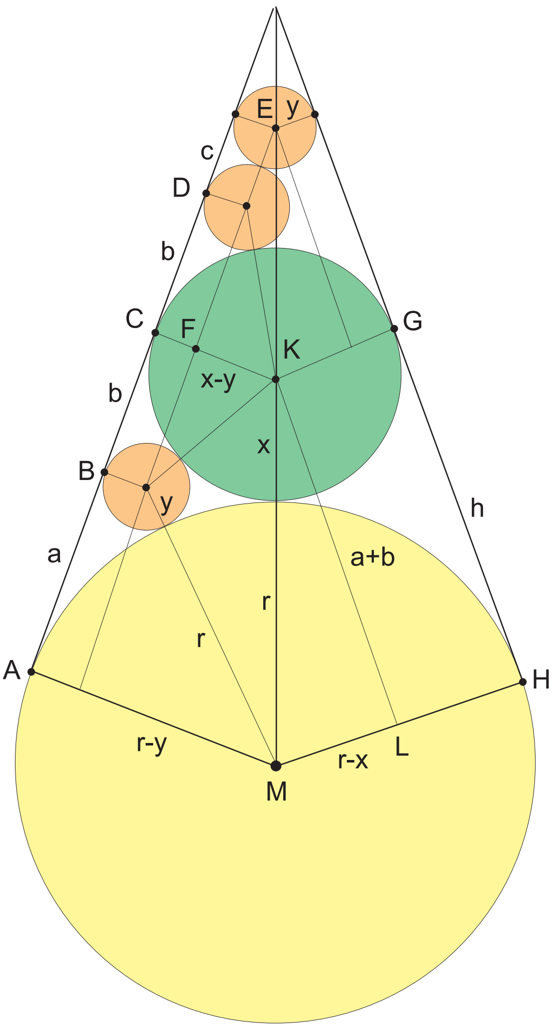


Abbildung 11.2: Skizze zur Lösung

Aus der Berührung der Kreise untereinander lassen sich mit Hilfe des Pythagoras folgende Beziehungen ableiten:

$$a = 2\sqrt{r\,y}, \quad b = 2\sqrt{x\,y}, \quad h = 2\sqrt{r\,x}, \quad c = 2\,y \tag{11.1}$$

Die Tangentenabschnitte $\overline{AC}$ und $\overline{HG}$ sind gleich lang:

$$\overline{AC} = \overline{HG}: \quad a + b = h \quad \rightarrow \quad 2\sqrt{r\,y} + 2\sqrt{x\,y} = 2\sqrt{r\,x} \tag{11.2}$$

Die Dreiecke EFK und KLM sind einander ähnlich und es gilt der Verhältnissatz:

$$\frac{b+c}{x-y} = \frac{a+b}{r-x} \quad \rightarrow \quad \frac{2\sqrt{x\,y} + 2\,y}{x-y} = \frac{2\sqrt{r\,x}}{r-x} \tag{11.3}$$

Die weitere Umformung der Gleichungen (11.2), (11.3) erfolgt mit Hilfe eines CAS Programms. Die Vereinfachnug von Gleichung (11.3) ergibt:

$$y\left(\frac{1}{-y+\sqrt{xy}}+\frac{1}{-\sqrt{ry}+\sqrt{xy}}\right)=0 \tag{11.4}$$

Nach Auflösung von (11.2) und (11.4) erhält man als Lösungsmenge:

$$\begin{aligned}
&x_1=\frac{r}{2}, \quad y_1=\left(3-2\sqrt{2}\right)r,\\
&x_2=\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)r, \quad y_2=\left(3+2\sqrt{2}\right)r,\\
&x_3=-\frac{3}{2}\left(-2+\sqrt{3}\right)r, \quad y_\S=\left(7-4\sqrt{3}\right)r,\\
&x_4=\frac{3}{2}\left(2+\sqrt{3}\right)r, \quad y_4=\left(7+4\sqrt{3}\right)r
\end{aligned}$$

Im Sinne der Augabenstellung ist das Lösungspaar x_1, y_1 gültig, d.h. der mittlere Radius x beträgt genau die Hälfte vom großen Radius r.

12 Literaturverzeichnis

[1] Hidetoshi Fukagawa, Tony Rothman, Freeman Dyson: Sacred Mathematics - Japanese Temple Geometry. Princeton Univ Press 2008

[2] Christoph J. Scriba, Peter Schreiber : 5000 Jahre Geometrie: Geschichte, Kulturen, Menschen. Springer Verlag, Berlin - Heidelberg 2005

[3] Programm Euklid, Roland Mechling, http://www.dynageo.de/

[4] Programm Zirkel und Lineal, René Grothmann, http://zirkel.sourceforge.net/

[5] Programm GeoGebra, Dr. Markus Hohenwarter http://www.geogebra.org/cms/

[6] Internet: http://www.wasan.jp/english/

[7] Internet: http://www.cut-the-knot.org/proofs/jap.shtml

[8] Internet: http://www.ethnomath.org/resources/okumura2001.pdf

[9] Internet: http://www.hojm.fsnet.co.uk/edo.htm

[10] Internet: http://mathworld.wolfram.com/SangakuProblem.html

[11] Internet: http://www.arsetmathesis.nl/sangatekst.htm

[12] Internet: http://interactive-mathvision.com/PaisPortfolio/Sangaku/SangakuFrames.html

[13] Internet: http://www.paginar.net/matias/articles/Sangaku/Sangaku.html

[14] Internet: http://www.matheraetsel.de/sangaku.html