2

Fachdidaktische Analyse

Im mathematisch orientierten 1.Teil dieser Arbeit wurden einige Zugänge zu den Kegelschnitten vorgestellt. Im 2.Teil sollen diese nun fachdidaktisch hinterleuchtet und analysiert werden. Dabei soll deren Einsetzbarkeit in unterschiedlichen Lehr- und Lernsituationen beschrieben werden. Es soll jedoch keine Klassifizierung bezüglich gut und schlecht vorgenommen werden, denn schließlich soll im Unterricht die Wahl der Methoden, des Stils und auch der geeigneten Inhalte und deren Darstellungsform an den Schülern orientiert werden. Der geistig-intellektuelle Entwicklungsstand der Schüler insbesondere seine Vorkenntnisse und Erfahrungen sind ebenso zu berücksichtigen wie seine soziale Situation und die Lehrer-Schüler-Beziehung. Folglich wäre es verfehlt, angesichts dieser unterschiedlichen Bedingungen ein fertiges Rezept für den optimalen Zugang zu den Kegelschnitten anzugeben.

Um eine fachliche Grundlage für die Einordnung der verschiedenen Zugänge zu erhalten, werden zunächst die Inhalte des Lehrplans präsentiert und einige methodisch-didaktischen Prinzipien vorgestellt.

2.1. Lehrplan

In diesem Kapitel wird aufgezählt, was im Lehrplan der allgemeinbildenden höheren Schulen, der übrigens nur Rahmencharakter besitzt, zum Thema Kegelschnitte geschrieben steht.

2.1.1. Unterstufe

Im Rahmen des Mathematikunterrichts werden die Schüler das erste Mal mit einem Kegelschnitt in der 3. Klasse konfrontiert, nämlich bei der Behandlung des indirekt proportionalen Verhältnisses $y = \frac{a}{x}$. Allerdings scheint es mir nicht sinnvoll, bereits dort zu erwähnen, dass es sich bei diesem Graphen um einen Hyperbelast handelt, da zu diesem Zeitpunkt die Schüler mit dem Erlernen einiger neuer Begriffe (z.B.: direkt und indirekt proportionales Verhältnis) beschäftigt sind, und das Erarbeiten der Kegelschnitte laut Lehrplan noch nicht vorgesehen ist.

In der 4. Klasse steht dann das graphische Darstellen von funktionalen Zusammenhängen auf dem Programm, wo u.a. Funktionen der allgemeinen Form $y = ax^2 + bx + c$ bzw. $y = \frac{a}{x} + b$ konstruiert werden, also Parabeln und Hyperbeln vorkommen. Hier ist ein Querverweis auf die Kegelschnitte wünschenswert, da diese noch ausführlicher behandelt werden sollen, wie es laut Lehrplan für die 4. Klasse vorgesehen ist:

> Untersuchen der Schnitte von Ebenen mit Drehzylindern und Drehkegeln; allenfalls Konstruieren von Kegelschnittlinien einer bestimmten Art (z.B. von Ellipsen aufgrund der Brennpunktsdefinition).[65]

Genauer konkretisiert sind obige drei Zeilen im Kommentarheft[66]:

> Die Schüler können an vorgegebenen Zeichnungen und Modellen die möglichen Schnittkurven von Ebenen mit Drehzylindern oder Drehkegeln kennenlernen.

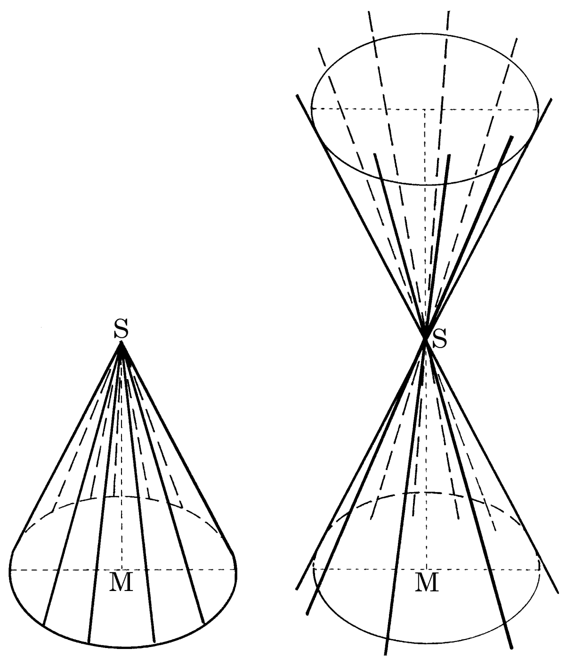
---

[65] LEHRPLAN-SERVICE Mathematik AHS, 2, 1988, S. 28
Lehrplan gültig ab 1. Oktober 1986

[66] LEHRPLAN-SERVICE Mathematik AHS, 2, 1988, S. 80

Dabei sollen die Schüler auch erfahren, dass mit dem Namen „Drehkegel“ verschiedene Vorstellungen verbunden sein können:

Drehkegel als ein (endlicher) Körper, der von einer Kreisfläche und einer Mantelfläche begrenzt ist; dabei besteht die Mantelfläche aus Strecken gleicher Länge;
Drehkegel als eine unbegrenzte Fläche, die dadurch entsteht, dass man jede Mantellinie eines endlichen Kegels über ihre Endpunkte hinaus zu einer Geraden verlängert.



Die Schüler sollen erfahren, dass Kegelschnitte auch in anderen Zusammenhängen auftreten, etwa als Graphen der Funktionen f mit $f(x) = x^2$ oder $f(x) = \frac{1}{x}$, als Wurfparabeln oder als Planetenbahnen.

- Ein systematisches Üben des Zeichnens von Kegelschnittlinien ist nicht erforderlich, doch können Schüler auf verschiedene Weisen solche Kurven exemplarisch zeichnen:
- Zeichnen von Parabeln oder Hyperbeln als Funktionsgraphen;
- Zeichnen von Wurfparabeln (Zusammensetzung einer schrägen geradlinigen gleichförmigen Bewegung und des freien Falles);
- Zeichnen von Ellipsen durch proportionales Verlängern oder Verkürzen von parallelen Kreissehnen (Ellipse als affines Bild des Kreises);
- Zeichnen von Ellipsen nach der „Gärtnermethode“ unter Verwendung eines Fadens;
- allenfalls Konstruieren von Kegelschnittlinien einer bestimmten Art (z.B. von Ellipsen) nach der Brennpunktsdefinition als Beispiel für das Ausführen einer (neuartigen, etwas schwierigeren) Konstruktionsvorschrift.

2.1.2. Oberstufe

Explizit treten die Kegelschnitte erst im Lehrstoff der 7. Klasse auf.

Die Parabel kann bereits in der 5. Klasse eingeführt werden, wo sie bei Proportionalitäten höherer Ordnung und insbesondere beim graphischen Lösen quadratischer Gleichungen in Erscheinung tritt. Auch der Begriff der Hyperbel kann in dieser Schulstufe erwähnt werden, da die Hyperbel als Bild der $y=\frac{a}{x}$-Funktionen vorkommt.

In der 7. Klasse wird dann das eigentliche Kapitel der Kegelschnitte behandelt:

> Das analytische Beschreiben von geometrischen Objekten durch nichtlineare Gleichungen (Herleiten von Gleichungen), das analytische Untersuchen von geometrischen Beziehungen und das rechnerische Lösen von geometrischen Problemen sollen die Hauptaktivitäten der Schüler sein. Eine umfassende Behandlung der Kegelschnitte ist nicht erforderlich.[67]

Bezüglich der Kegelschnittlinien werden dann obige, allgemein gehaltenen Aussagen, die nichtlineare analytische Geometrie betreffend, genauer spezifiziert:

> Exemplarisches Herleiten von Gleichungen von Kegelschnitten. Untersuchen der gegenseitigen Lage von Kegelschnittlinien und Geraden. (Hier ist neben dem Darstellen und Interpretieren auch das Argumentieren von den Schülern gefordert.)[68]

Im Kapitel *Grundlegende Intentionen des Mathematik-Lehrplans 1989* findet man im Kommentarheft dazu folgende Anmerkungen:

> … Im Vordergrund steht also hier nicht so sehr das Benützen einer fertigen Formel sondern das Übersetzen (Interpretieren) eines geometrischen Sachverhaltes, nämlich einer Kegelschnittsdefinition, in eine algebraische Formel.[69]

---

[67] LEHRPLAN-SERVICE Mathematik AHS, Oberstufe, 1991, S. 146
Lehrplan gültig ab 1. September 1991

Der Lehrplan, der das Kapitel der nichtlinearen analytischen Geometrie – insbesondere die Kegelschnitte – abdeckt, ist für das Gymnasium, das Wirtschaftskundliche Realgymnasium und das Realgymnasium gleichlautend.

[68] LEHRPLAN-SERVICE Mathematik AHS, Oberstufe, 1991, S. 146

[69] LEHRPLAN-SERVICE Mathematik AHS, Oberstufe, 1991, S. 32

… Nicht erforderlich sind beispielsweise Aufgaben, in denen eine Gleichung einer Ellipse in Hauptlage aufgestellt werden soll, von der zwei Punkte angegeben sind (und bei der auf die Ellipsengleichung $b^2{x_1}^2 + a^2{x_2}^2 = a^2b^2$ zurückgegriffen wird).
Das Untersuchen der gegenseitigen Lage von Kegelschnitten und Geraden kann auf Beispiele beschränkt werden, bei denen die Gleichungen von Kegelschnitten und Geraden mit konkreten Zahlen angegeben sind. Darüber hinaus können solche Untersuchungen auch allgemein etwa für eine Ellipse in Hauptlage und für eine beliebige Gerade durchgeführt und Bedingungen für die möglichen Lagebeziehungen (immer unter weitgehender Arbeit der Schüler) ermittelt werden. Im Lehrplan wird jedoch nicht gefordert, dass mit Berührbedingungen gearbeitet werden soll, dass die Schüler Formeln für die Tangentengleichungen kennen sollen oder, dass Tangentengleichungen aufgestellt werden müssen.[70]

[70] LEHRPLAN-SERVICE Mathematik AHS, Oberstufe, 1991, S. 37

Da im Lehrplan nur Themen aufgelistet werden, bleibt dem Lehrer eine gewisse Freiheit bei der Gestaltung des Unterrichts. Bei der Unterrichtsplanung ist es deshalb wichtig, sich die Frage, zu stellen, was man mit dem Lehrplan überhaupt erreichen und bewirken möchte.

2.1.3. Ziele des Mathematikunterrichts

Der Mathematikunterricht in der Oberstufe soll zum Erreichen der folgenden fachspezifischen wie fächerübergreifenden Ziele beitragen. Hier werden jene herausgegriffen, die für die Betrachtung der Kegelschnitte relevant sind.

Mathematisches Wissen und Können

Die Schüler sollen

grundlegende Kenntnisse, Fertigkeiten, Fähigkeiten und Einsichten in den Stoffgebieten Geometrie, Algebra und Analysis erwerben und verwenden können,

mit mathematischen Methoden und Denkweisen vertraut werden,

mit der Verwendung geeigneter mathematischer Texte und Arbeitsmittel, insbesondere elektronischer Rechengeräte, vertraut werden.

Die Kegelschnitte weisen Beziehungen zu anderen mathematischen Teilgebieten (Algebra und Analysis) auf, vor allem aber zu zentralen Ideen der Geometrie (z.B. Abbildung, Darstellung, Symmetrie) und zu fundamentalen Ideen der Mathematik, etwa dem Zuordnen und Verallgemeinern.

Anwenden von Mathematik

Die Schüler sollen

ihr mathematisches Wissen und Können in verschiedenen Bereichen, insbesondere in solchen, die zu ihrer Lebens- und Wissenswelt Bezug haben, anwenden können,

Mathematik als nützliches Werkzeug zur Lösung von Alltagsproblemen erkennen,

Einsichten in Probleme des Anwendens von Mathematik – wie Probleme des Bildens von mathematischen Modellen – gewinnen.

Dass man in unseren unmittelbaren und alltäglichen Umwelt immer wieder auf Kegelschnitte stößt, wurde bereits im Kapitel „Kegelschnitte im täglichen Leben“

vor Augen geführt. Im Kommentar zum Lehrplan[71] wird erwähnt, dass der Schwerpunkt eines Themas nicht immer ein mathematischer Inhalt sein muss, sondern dass auch ein außermathematischer Sachverhalt mit mathematischen Mitteln untersucht und dadurch ein vertiefter Einblick in diesen Sachverhalt gewonnen werden kann; schließlich entspricht dies der Situation, wie Mathematik in der Praxis angewendet wird.

> *Allgemeine mathematische Fähigkeiten*
>
> Folgende Lernziele sind im Zusammenhang mit dem Erwerb von mathematischem Wissen und Können und dem Anwenden von Mathematik anzustreben:
>
> *Argumentieren und exaktes Arbeiten.*
> Insbesondere: präzises Beschreiben von Sachverhalten, Eigenschaften und Begriffen (Definieren); Arbeiten unter bewußter Verwendung von Regeln; Begründen (Beweisen).
>
> *Darstellen und Interpretieren.*
> Insbesondere: verbales, formales und graphisches Darstellen von Sachverhalten; Herauslesen von Eigenschaften und Beziehungen aus Darstellungen.
>
> *Produktives geistiges Arbeiten.*
> Insbesondere: Kombinieren von vertrauten Methoden; Anwenden bekannter Verfahren in teilweise neuartigen inner- oder außermathematischen Situationen.
>
> *Kritisches Denken.*
> Insbesondere: Überprüfung von Vermutungen und Ergebnissen; Feststellen von Voraussetzungen; Erkennen von Unzulänglichkeiten mathematischer Modelle.

Ein geometrisches Thema wie die Kegelschnitte deckt nicht nur Lernziele wie das Argumentieren, Interpretieren oder Darstellen ab, sondern kann auch einen wichtigen Beitrag zum Erfüllen fast aller eben genannten Lernziele leisten. So kann z.B. das produktive geistige Arbeiten geschult werden, wenn beim Erarbeiten von Beweisen Begriffe vernetzt und verschiedene Lösungsmethoden kombiniert werden.

[71] LEHRPLAN-SERVICE Mathematik AHS, Oberstufe, 1991, S. 36

Reflektieren über Mathematik und mathematische Arbeitsweisen

Die Schüler sollen beispielsweise

Probleme des Definierens, Beweisens, der Exaktheit erkennen,

Problemlösestrategien bewusst verwenden,

die Veränderlichkeit mathematischer Begriffe in der historischen und persönlichen Entwicklung kennen lernen,

Beziehungen und Abgrenzungen zu anderen Erlebens- und Wissensbereichen herstellen.

Insbesondere in den Kapiteln „Kegelschnitte im täglichen Leben“ und „historischer Zugang“ wurde ein wichtiger Beitrag zum Verständnis für „historische Aspekte“ geleistet und „Beziehungen zu anderen Erlebensbereichen“ hergestellt.

Persönlichkeits- und Sozialentwicklung

Die Schüler sollen befähigt werden

sorgfältig, konzentriert und planmäßig zu arbeiten,

gesetzmäßig zu denken, klare Begriffe zu bilden, sinnvolle Fragen zu stellen, sowie kontrolliert zu abstrahieren und zu verallgemeinern,

Einsichten in grundlegende wissenschaftliche Verfahrensweisen und Denkvorstellungen zu gewinnen,

kritisches Denken zu entwickeln und gegenüber verschiedenen Standpunkten und Sichtweisen offen zu sein,

sowohl selbstständig als auch kooperativ zu arbeiten,

Freude an kreativem Verhalten und intellektuellen Leistungen zu gewinnen.[72]

Das Erreichen dieser Ziele und Fähigkeiten stellt eine gute Vorbereitung der Schüler auf ihr späteres Leben – insbesondere auf Studium und Beruf – dar.

[72] LEHRPLAN-SERVICE Mathematik AHS, Oberstufe, 1991, S. 29-31

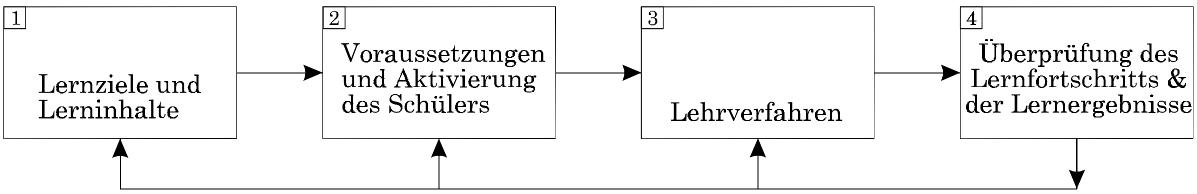
2.2. Didaktische und methodische Grundlagen im Mathematikunterricht

In diesem Kapitel werden die didaktischen und methodischen Grundlagen behandelt, die notwendig sind, um die Unterrichtseinheit „Kegelschnitte“ schulgerecht aufzubereiten.

2.2.1. Das Unterrichtsmodell von R. Glaser

In der Mathematikdidaktik geht es unter anderem darum, wie der Schüler lernen kann, die Welt mit mathematischen Mitteln kognitiv[73] zu erschließen. Das nun hier beschriebene Unterrichtsmodell[74] von Glaser rückt den Lernprozess in den Mittelpunkt. Es soll eine Grundlage für Lehrentscheidungen abgeben und so den Lehrer als Organisator von Lernprozessen unterstützen.[75]

Das Unterrichtsmodell von Glaser besteht aus vier Komponenten, deren Zusammenhang hier schematisch dargestellt ist.



2.2.1.1. *Lernziele und Lerninhalte*

Bei der Planung einer Unterrichtseinheit (damit ist keine Schulstunde, sondern ein kleines, einheitliches Teilgebiet des Lehrstoffes gemeint) werden die Lerninhalte festgelegt und durch Lernziele spezifiziert.

---

[73] kognitiv ... erkenntnismäßig; das Denken, die Erkenntnis betreffend

[74] Ein Unterrichtsmodell versucht den Unterricht zu stilisieren und schematisieren und bietet so eine Hilfe zur Analyse und Effektivierung didaktischer Ideen.

[75] WITTMANN, 1981, S. 11

Dazu muss der Lehrer den Lehrstoff „im Rückenmark haben“, wie es Prof. Reichel einmal treffend ausdrückte; oder anders gesagt: Der Lehrer muss den Stoff von einem höheren mathematischen Niveau aus beherrschen und ein mathematisches Gefühl für die wesentlichen Ideen und Zusammenhänge besitzen, um Schwerpunkte im Unterricht richtig setzen zu können.

Weiters muss der Lehrer Situationen der Wirklichkeit kennen, in denen die betreffende Theorie zur Lösung oder Beschreibung außermathematischer Probleme angewendet werden kann.

Bei der Behandlung des Inhalts muss sich der Lehrer immer der Zielsetzung bewusst sein. Während manche Inhalte so wichtige mathematische Werkzeuge umfassen, wie etwa das Gleichungenlösen, dass sie keiner Rechtfertigung innerhalb des Mathematikunterrichts bedürfen, tragen andere Inhalte die Zielsetzung nicht in sich, sondern in allgemeinen Intentionen (allgemeine Lehrziele), die gleichsam mit Hilfe dieses Inhalts erreicht werden sollen (etwa die Fähigkeit, Probleme geschickt anzupacken).

Der wichtigste Gesichtspunkt schließlich, unter dem sich der Lehrer mit dem Lehrstoff auseinander setzen muss, besteht in der Übersetzung der mathematischen Inhalte in eine Lernstruktur. Hier ist aber keineswegs eine „Herabtransformierung“ (Elementarisierung und Konkretisierung) von Fachstrukturen der Hochschulmathematik auf eine niedrigere Ebene gemeint, sondern erstrebenswert sind eher Lernstrukturen, die durch genetische Rekonstruktion der Mathematik gewonnen werden, das heißt von konkreten Problemen ausgehend und an die Vorkenntnisse und die Erfahrungen der Schüler anknüpfend. Im genetischen Prinzip[76] geht es darum, den Schülern nicht die fertige Mathematik vorzuwerfen, sondern vielmehr wird versucht, am Vorwissen der Schüler anzuknüpfen und einen kontinuierlichen Prozess der Erkenntnisgewinnung anzustreben.

[76] Das genetische Prinzip wird später noch im Kapitel „Die genetische Unterrichtskonzeption“ besprochen.

2.2.1.2. *Voraussetzungen beim Schüler und Aktivierung des Schülers*

Zuerst muss festgestellt werden, welche Vorkenntnisse aus vorangegangenen Unterrichtseinheiten, Vorerfahrungen[77] und allgemeine Lernvoraussetzungen die Schüler aufweisen. Unter allgemeinen Lernvoraussetzungen eines Schülers fasst man Eigenschaften wie seinen kognitiven Entwicklungszustand, seine speziellen Interessen, seine Art, sich mit neuen Situationen auseinanderzusetzen, sein Lerntempo, seine Ausdauer beim Lernen und seine sprachlichen Fähigkeiten zusammen.[78]

Damit der Schüler sein Vorverständnis optimal einsetzt und sich mit dem Lerninhalt möglichst aktiv auseinandersetzt, muss er während des Lernprozesses motiviert und aktiviert werden. Eine Aktivierung des Schülers kann z.B. zu Beginn des Lernprozesses erreicht werden, indem im Schüler eine Erwartungshaltung aufgebaut wird; der Schüler muss in einer für ihn verständlichen Form darüber informiert werden, welches das ungefähre Ziel ist. Auch während des Lernprozesses sollte der Schüler Anreize erhalten. Immer wieder muss die Neugier und der Forschungsdrang geweckt werden und Gelegenheiten zum Experimentieren geboten werden, wobei auch Zwischenerfolge mit Maß und Ziel „gefeiert" werden sollen, denn jede Art von Aktivierung und Motivation verliert auf Dauer ihre Wirkung, wenn der Schüler keine ausreichenden Erfolge erzielt.

2.2.1.3. *Lehrverfahren*

Nach der Art der einzelnen Lernziele, den Voraussetzungen beim Schüler und den verfügbaren Motivationen richten sich die Lehrverfahren. Es geht dabei hauptsächlich um die Konstruktion einer Lernsequenz, die Herstellung geeigne-

---

[77] Die Vorerfahrungen sind von Schüler zu Schüler unterschiedlich, und sowohl von individuellen Besonderheiten als auch vom Milieu abhängig, in dem der Schüler aufgewachsen ist. Es wurde weder eine größere Mühe beim Erlernen noch ein geringeres Interesse bei Schülern aus sozial schwächer gestellten Schichten beobachtet, sondern eher eine langsamere Entwicklung des Abstraktionsvermögens. CASTELNUOVO, 1968, S. 78

[78] WITTMANN, 1981, S. 15

ter Lernbedingungen, den Einsatz von Hilfsmitteln für das Lernen und die entsprechende Wahl der Unterrichtsformen.[79]

Darstellungsformen

Trotz der Fülle an Hilfsmitteln, die für die Präsentation des Unterrichts einsetzbar sind (Computer, Video, Modelle und Schablonen, Texte, historische und aktuelle Berichte, ...) unterscheidet man nur drei Darstellungsformen (Repräsentationsmodi) des Wissens: die *enaktive* Form der Darstellung (=Darstellung durch eine Handlung, das „Vormachen"), die *ikonische* Form der Darstellung (=Darstellung durch bildliche Mittel) und schließlich die abstrakteste, zugleich aber auch leistungsfähigste Form der Darstellung: die *symbolische* Darstellung (=Darstellung mit Hilfe von Sprache und Zeichen). Für den Mathematikunterricht ist es von großer Bedeutung, dass sich die symbolischen Begriffe und Beziehungen der Mathematik ikonisch und in einfachen Fällen auch enaktiv darstellen lassen, da diese Formen für Schüler gewöhnlich leichter verständlich sind.

Gerade ein geometrisches Thema wie die Kegelschnitte eignet sich zur Behandlung in allen drei Darstellungsformen: Zur enaktiven Darstellungsform gehört der Umgang mit Kegelschnittsmodellen, wie sie im Lehrmittelhandel erhältlich sind; auch das Hantieren mit Faden- oder Papierstreifenkonstruktion zur Darstellung einer Ellipse gehören dazu. Zur ikonischen Stufe zählt man die graphische Darstellung (Punktkonstruktion der Kegelschnitte) sowie Abbildungen über deren Entstehung, wie etwa die ebenen Schnitte eines Drehkegels oder Flächenverwandlungen. In den symbolischen Bereich fallen schließlich die Herleitung der Kegelschnittsgleichungen, ebenso wie das Vermuten und Absichern von Kegelschnittseigenschaften.[80]

---

[79] WITTMANN, 1981, S. 16

[80] SCHUPP, 1988, S. 43

Durchführung des Lehrverfahrens

Beim Unterrichten kommt es zu Wechselwirkungen zwischen Lehrer und Schülern und auch zwischen Schülern untereinander. Diese Interaktionen kann man hinsichtlich der Gestaltung des Unterrichts

in Sozialformen S_1 Unterricht im Klassenverband

S_2 Teilgruppenunterricht

S_3 Einzelunterricht

und der beabsichtigten Schülerinitiative

I_1 Instruiert werden

I_2 Zur Entdeckung gelenkt werden

I_3 Impulse erhalten

unterteilen. Die Grundtypen der Unterrichtsformen ergeben sich aus der Kombination einer Sozialform mit einer beabsichtigten Schülerinitiative, z.B. Frontalunterricht (S_1,I_1), Fragend-entwickelnder Unterricht (S_1,I_2).

Bei der Behandlung einer Unterrichtseinheit ist es meist zweckmäßig, in wechselnden Unterrichtsformen zu arbeiten. (Manchmal ist der Lehrer dazu auch gezwungen, wenn z.B. bei I_2 keine ausreichende Schülerinitiative stattfindet.)

Welche Unterrichtsform gewählt wird, sollte nach didaktischen Gesichtspunkten entschieden werden; man wird dabei in Betracht ziehen, um welches Lernziel es sich handelt, welche Lernbedingungen nötig sind und welche Hilfsmittel für die Unterrichtsgestaltung zur Verfügung stehen.

Bei der Realisierung einer Lernsequenz[81] werden einzelne Lernschritte sukzessive behandelt, wobei ein Lernschritt i.A. in drei Phasen (Anbahnung, Entfaltung und Gestaltung) gegliedert ist.

[81] Genauere Behandlung des Themas „Konstruktion von Lernsequenzen – Unterrichtskonzeptionen" siehe später

2.2.1.4. *Überprüfung des Lernfortschritts und der Lernergebnisse*

Durch die Überprüfung der Lernergebnisse einer Unterrichtseinheit wird nicht nur der Leistungsstand der Schüler erhoben, sondern der Lehrer kann sich auch ein Bild machen, inwieweit das Lehrverfahren gut und effizient war. Didaktisch gesehen, ist es wichtig, bereits während der Behandlung der Unterrichtseinheit eine Überprüfung des Lernfortschritts vorzunehmen – der Lehrer sollte laufend die Reaktionen der Schüler auf Probleme, die im Unterricht aufgeworfen wurden, beobachten und eigens gestellte Verständnisfragen diagnostizieren –, um rechtzeitig Verständnislücken aufdecken zu können und sodann Anhaltspunkte für gezielte Hilfen und Maßnahmen geben zu können.[82]

[82] WITTMANN, 1981, S. 21

2.2.2. Konkretisierung der Ziele des Mathematikunterrichts

Die oben beschriebenen Lernziele des Mathematikunterrichts sind so allgemein gehalten (beim österreichischen Lehrplan der AHS handelt es sich bekanntlich um einen Rahmenlehrplan), dass sie keine expliziten Richtlinien vorgeben, wie diese Ziele im Unterricht verwirklicht werden sollen.[83]

Da es wichtig ist, den Schwierigkeitsgrad, die Komplexität, kurz das Niveau eines Lernziels zu kennen, hat B.S. Bloom[84] 1956 eine Taxonomie für Lernziele aller Unterrichtsfächer erstellt. Ausgehend von dieser Einteilung hat Zech 1977 eine speziell auf den Mathematikunterricht abgestimmte Taxonomie erstellt; er hat in der Hierarchie der Lernziele (1.) Wissen und (2.) Verstehen umgeordnet, da man beim Mathematiklernen Kenntnisse nicht ohne vorheriges Verständnis erwerben sollte – nur auf der Basis des mathematischen Verständnisses haben meist mathematische „Kenntnisse“ Sinn[85] –, während er andere Lernziele, wie etwa das Beherrschen von Algorithmen und Rechenverfahren hinzugefügt hat.[86]

2.2.2.1. Didaktische Taxonomie kognitiver Ziele des Mathematikunterrichts von F. Zech

Kognitive Lernziele sind Kenntnisse, sowie geistige Fertigkeiten und Fähigkeiten. Weiters unterscheidet man noch psychomotorische (hier geht es um körperliche Fertigkeiten und Fähigkeiten) und affektive Lernziele (diese umfassen die Haltungen, Einstellungen, Interessen und Wertschätzungen).

---

[83] WITTMANN, 1981, S. 48

[84] B.S. Bloom war Prüfer an Colleges in den USA und schuf seine Taxonomie, um Prüfungsanforderungen in verschiedenen Lerngruppen besser vergleichen zu können.

[85] ZECH, 1978, S. 67

[86] CLAUS, 1995, S. 24-29

Die kognitiven Lernziele werden hier nun näher besprochen.[87]

1. *Verständnis von Begriffen, Sätzen und Verfahren*

   Die Schüler sollen Sätze in eigenen Worten wiedergeben können, die einzelnen Schritte an einem Rechen- oder Beweisgang erläutern können, …

2. *Kenntnis von Sachverhalten, wie Bezeichnungen, Fachausdrücken, Definitionen, Sätzen und Formeln*

   Ellipse, Hyperbel, Parabel, lineare Exzentrizität, … sollen den Schülern ein Begriff sein.

3. *Beherrschen von inhaltlichen und formalen Verfahren*

   Die Schüler sollen Rechenverfahren und geometrische Konstruktionen beherrschen, sowie Analogbeweise – etwa die Herleitung der Gleichungen nach Kenntnis der Brennpunktsdefinitionen – durchführen können.

4. *Analyse und einfache Anwendungen, wie Entsprechungen finden („Analogisieren“), Aufgaben eines bekannten Typs lösen, Strukturen aus einfachen Modellen abstrahieren, mathematische Daten aus einem Kontext herauslösen („Formalisieren“) und Fehler finden*

   Die Schüler sollen u.A. befähigt werden, gemeinsame Eigenschaften der Kegelschnitte zu finden.

5. *Synthese und eigentliches Problemlösen. Dazu gehört die Fähigkeit, Daten und Verfahren neu zu kombinieren, um aus Bekanntem logische Schlüsse zu ziehen und Lösungspläne zu entwickeln*

   Entdecken und Beweisen von Kegelschnittseigenschaften, …

Was auffällt ist, dass das Lernziel „Bewerten“, das bei Bloom höchste Wichtigkeit hat, bei Zechs Taxonomie gänzlich unberücksichtigt bleibt. Ziele dieser Art sind aber wesentlich im anwendungsorientierten, im projektorientierten und im genetischen Mathematikunterricht; schließlich bewerten wir laufend mehr oder weniger bewusst Handlungen und Situationen – oft auch mit Hilfe der Mathematik.

[87] ZECH, 1978, S. 65-67

2.2.3. Konstruktion von Lernsequenzen - Unterrichtskonzeptionen

Da ein Schüler den Stoff natürlich nicht auf einen Schlag erfassen kann, muss sich der Lehrer Gedanken machen, von welchen Punkten ausgehend, über welche Zwischenstufen und in welcher Reihenfolge der Stoff aufgerollt und behandelt werden soll.

Man unterscheidet folgende Unterrichtskonzeptionen, die sich je nach Zielsetzung besonders auf die Wissenschaft, Gesellschaft und den Schüler beziehen:

- genetische Unterrichtskonzeption
- anwendungsorientierte Unterrichtskonzeption
- projektorientierte Unterrichtskonzeption
- wissenschaftsorientierte Unterrichtskonzeption

2.2.3.1. Die genetische Unterrichtskonzeption

Einführend kann man sagen, dass „Genetiker", wie Wagenschein und Wittenberg, die Auffassung vertreten, dass Mathematik nur über den Prozess der Mathematisierung richtig verstanden und erlernt werden kann, nicht aber als Fertigfabrikat.

Genauer wird die genetische Unterrichtskonzeption bei WITTMANN beschrieben:

> Eine Darstellung einer mathematischen Theorie heißt genetisch, wenn sie an den natürlichen erkenntnistheoretischen Prozessen der Erschaffung und Anwendung von Mathematik ausgerichtet ist. Entsprechend der Tatsache, dass sich Theorien in den exakten Wissenschaften bei der Untersuchung von Problemen durch Verfeinerung primitiver Vorformen entwickelten und weiter entwickeln, kann man eine genetische Darstellung durch folgende Merkmale charakterisieren:
>
> Anschluss an das Vorverständnis der Adressaten,
>
> Einbettung der Überlegungen in größere ganzheitliche Problemkontexte außerhalb oder innerhalb der Mathematik,
>
> Zulässigkeit einer informellen Einführung von Begriffen aus dem Kontext heraus,

Hinführung zu strengen Überlegungen über intuitive und heuristische[88] Ansätze,

durchgehende Motivation und Kontinuität,

während des Voranschreitens allmähliche Erweiterung des Gesichtsfeldes und entsprechende Standpunktverlagerung.[89]

Der historische Zugang zu den Kegelschnitten beispielsweise eignet sich exzellent, um nach der genetischen Unterrichtskonzeption behandelt zu werden.

2.2.3.2. *Die anwendungsorientierte Unterrichtskonzeption*

Ausgehend von einer realen Situation, wo ein Problem vorgegeben ist, kommt der Schüler durch Beobachten, Experimentieren, Vereinfachen und Idealisieren zu einem mathematischen Modell. Ist dieses gelöst, muss das Ergebnis zur Beantwortung des außermathematischen Problems übertragen werden.

Die anwendungsorientierte Unterrichtskonzeption verfolgt neben dem vertieften Verständnis von Situationen des Alltags vor allem Ziele, wie die Schulung des Problemlösens und Mathematisierens. Anwendungsbeispiele können auch zu einer Diskussion über eine sinnvolle Rechengenauigkeit anregen.

Wünschenswert ist es, wenn Anwendungsbeispiele immer wieder in den Unterricht eingebaut werden, denn sie stellen für den Schüler eine Art Belohnung und Abwechslung nach einer längeren theoretischen Durststrecke dar, da Anwendungen motivieren und den Unterricht durch Arbeitsweisen, die im normalen Mathematikunterricht nicht üblich sind, beleben können. Wenn man auch Schüler, die im Allgemeinen an Mathematik uninteressiert sind, zur Mitarbeit gewinnen will, sollte man bei der Wahl der Anwendungen stets darauf achten, dass die Beispiele nicht nur realitätsbezogen, sondern auch aus dem Erfahrungsbereich der Schüler entnommen sind.[90]

Die anwendungsorientierte Unterrichtskonzeption wurde im Kapitel „Kegelschnitte im täglichen Leben“ berücksichtigt.

---

[88] Heuristik … Wissenschaft von den Verfahren, Probleme zu lösen

[89] WITTMANN, 1981, S. 130f.

[90] CLAUS, 1995, S. 163-167

2.2.3.3. *Die projektorientierte Unterrichtskonzeption*

Viele Sachverhalte, die den Schüler umgeben, motivieren zu – meist fächerübergreifendem – projektorientiertem Unterricht.

Die Schüler sollen sich dabei mit einer konkreten Aufgabenstellung handelnd auseinandersetzen bzw. ein konkretes Vorhaben durchführen, wobei sie selbst die Planung, Verantwortung und die praktische Verwirklichung erproben sollen. Dabei dient die Mathematik zur Erfassung von Sachzusammenhängen „nur“ als Hilfsmittel und Werkzeug, da in dieser Unterrichtskonzeption nicht die Entwicklung mathematischer Fähigkeiten das eigentliche Ziel ist, sondern die Einsicht in Probleme der sozialen Umwelt der Schüler. Nach der abschließenden Präsentation und Dokumentation der Ergebnisse des Projekts sollte der Schüler noch seine Leistung und seinen Beitrag zur Gesamtleistung kritisch bewerten und mit dem Lehrer diskutieren.

Die Herstellung eines Parabolspiegels könnte z.B. im Mittelpunkt eines Projektes stehen, in dem die Parabel und ihre Eigenschaften, wie die Brennpunktseigenschaft und Strahlengänge, ganz beiläufig studiert werden können.

2.2.3.4. *Die wissenschaftsorientierte Unterrichtskonzeption*

Ziel dieser Unterrichtskonzeption ist die Vermittlung der Struktur und der fundamentalen Ideen der zu Grunde liegenden Wissenschaft. Damit ist nicht allein der Zugang zur Mathematik, der über Definition - Satz - Beweis führt, gemeint – denn auf diese Weise wird Mathematik weder geschaffen, noch verstanden –, sondern der Schüler soll vielmehr auch mit der Arbeitsweise der mathematischen Forschung vertraut gemacht werden: Ausgehend von einer Vermutung soll der Sachverhalt nach naivem Erproben bewiesen, das Resultat kritisch betrachtet, nötigenfalls umformuliert, usw. werden. Dabei werden allgemeine Lernziele, wie mathematische Modellbildung, Argumentieren, Begründen und Beweisen verfolgt.

2.2.4. Die genetische Erkenntnistheorie von J. Piaget

Piaget[91] hat die Mechanismen studiert, die die Genese von Wissen regeln und didaktische Prinzipien entwickelt, die eine Anleitung für didaktische Maßnahmen zur Konstruktion von erfolgreichen Lehrverfahren geben soll.

Prinzip des aktiven Lernens

> Der Unterricht hat an der vorliegenden kognitiven Struktur des Lernenden anzusetzen. Aktive Assimilations- und Akkomodationsversuche des Schülers sind unverzichtbare Lernbedingungen und müssen während des Unterrichts in geeignet organisierten Lernsituationen breiten Raum erhalten.[92]

Der Lehrer soll sich dessen bewusst sein, dass seine Instruktionen wirkungslos bleiben, wenn sie nicht von Schüleraktivitäten begleitet sind. Es müssen daher Aktivitäten organisiert werden, die den Schüler in eine intensive Auseinandersetzung mit dem Gegenstand bringen; die Hauptaufgabe des Lehrers soll darin bestehen, Probleme verständlich zu machen und die Schüler bei der Erforschung der Probleme anzuleiten.

Für die Erforschung der Kegelschnitte bietet sich an, die Schüler mit Kegelschnittsmodellen und Fadenkonstruktionen hantieren zu lassen, aber auch eine einheitliche Einführung der einzelnen Kegelschnitte – beispielsweise mittels Brennpunktsdefinition –, wo die Schüler zur eigenständigen Erarbeitung der weiteren Kegelschnittsgleichungen angeregt werden können, kann sich positiv auf den Lernprozess auswirken.

Die schönsten Aktivitäten, wie Hantieren mit Modellen, Zeichnen und Rechnen, ..., bleiben aber wirkungslos, wenn sich beim Schüler nicht Einsicht einstellt, d.h., wenn der Schüler nicht die Gesamtstruktur („Gruppierung“) erkennt. Daher ist im Unterricht auf die Bildung von Operationsstrukturen zu achten:

[91] Jean Piaget (1896-1980), Kinderarzt, Psychologe und Philosoph in Genf, beobachtete, dass sich das Denken des Kindes aus Handlungen entwickelt. Er hat eine Pädagogik, die das Kind beim spielerischen Experimentieren unterstützt, anstatt es passiv lernen zu lassen, forciert.

[92] WITTMANN, 1981, S. 77

Operatives Prinzip

> Aufgabe des Lehrers ist es, die jeweils untersuchten Objekte und das System („Gruppierung“) der an ihnen ausführbaren Operationen deutlich werden zu lassen und die Schüler auf das Verhalten der Eigenschaften, Beziehungen und Funktionen der Objekte bei den transformierenden Operationen gemäß der Frage „Was geschieht mit …, wenn …?“ hinzulenken.[93]

Dabei ist es wichtig, dass Medien nicht nur betrachtet, sondern auch „bearbeitet“ und erforscht werden können, ganz nach dem Motto „I hear, and I forget - I see, and I remember - I do, and I understand“.

Dies kann beispielsweise durch Betasten und Erforschen von Kegelschnittsmodellen, aber auch durch eine zeichnerische Darstellung der Kegelschnitte bewirkt werden.

Integrationsprinzip

> Das Individuum kann mit der Umwelt umso erfolgreicher in Wechselwirkung treten, je vollständiger und mobiler seine Erkenntnisse („Schemata“) in Beziehungsnetzen integriert und organisiert sind. Man hat daher im Unterricht auf die Schaffung von Beziehungsnetzen und Sinnzusammenhängen hinzuarbeiten („Integrationsprinzip“).[94]

Dies bedeutet, dass ein mathematisches Thema im Unterricht als zusammenhängende Gesamtheit einzuführen ist, und nicht, wie früher im Mathematikunterricht manchmal üblich, in Form der Minischritt-Didaktik oder durch Isolierung der Schwierigkeiten.

Zum besseren Verständnis ist es also vorteilhaft, Zusammenhänge herauszuarbeiten – etwa zu zeigen, dass Kegelschnitte eine gemeinsame Scheitelgleichung besitzen oder auch als ebene Schnitte eines Drehkegels darstellbar sind.

Forderung nach Anschaulichkeit

> Eine Konfrontation der Schüler mit neuen Inhalten oder neuen Fragestellungen soll über Situationen erfolgen, bei denen nur einzelne Elemente oder Aspekte wirklich neu sind, ansonsten aber sollen möglichst

[93] WITTMANN, 1981, S. 79

[94] WITTMANN, 1981, S. 77

> reichhaltige Ansatzpunkte für eine Anwendung bekannter Schemata vorliegen.[95]

Durch die Formulierung neuer Probleme innerhalb bereits eingeführter Kontexte und die Überführung abstrakter Fragestellungen in leichter verständliche, alltägliche Zusammenhänge kann das neue Wissen leichter in bereits vorhandenes Wissen eingebettet werden.

Es ist günstiger, die Schüler bei der Einführung in ein neues Kapitel nicht mit einer Definition abzuschrecken, wie das etwa beim Zugang der Kegelschnitte mittels Brennpunktseigenschaften der Fall ist, sondern z.B. über Flächenverwandlungen die Kegelschnittsgleichungen zu erarbeiten, da dort von bekannten Verfahren (Höhensatz, Thaleskreis) ausgegangen wird.

Der Satz, der besagt, dass vom Brennpunkt kommende Lichtstrahlen, am Paraboloid reflektiert werden und parallel zur Achse austreten, bekommt mehr Sinn und wird leichter verständlich, wenn man an einen Autoscheinwerfer erinnert.

Prinzip der Stabilisierung

> Damit ein Schema gründlich einverleibt werden und sich zu einem stabilen Bestandteil der kognitiven Struktur des Lernenden entwickeln kann, muss es von Zeit zu Zeit in neuen anregenden Kontexten wieder geübt und angewendet und dabei generalisiert, diskriminiert, differenziert und mit anderen Schemata verzahnt werden.[96]

Gegen dieses Prinzip spricht eine Unterrichtsführung, bei der jedes Thema einmal besprochen wird und nach Absolvieren der diesem Inhalt zugestandenen Zeit, abgehakt ist. Aus lernpsychologischen Gründen ist es aber besser, den Inhalt noch einmal zu wiederholen, um ihn zu festigen, anstatt mit neuem Stoff fortzufahren.

Dass Kegelschnitte aus sehr unterschiedlichen Kontexten heraus besprochen werden können, zeigt diese Arbeit. Auch können die erworbenen Einsichten über Kegelschnitte durch das Erarbeiten von interessanten Anwendungsbeispielen gefestigt werden.

---

[95] WITTMANN, 1981, S. 78

[96] WITTMANN, 1981, S. 79

2.3. Historischer Zugang

Historische Aspekte werden wegen Zeitmangels im Mathematikunterricht meist nur selten behandelt; gelegentlich werden vielleicht Anekdoten (etwa jene über die Entdeckung der Summenformel für arithmetische Reihen von C.F. Gauß) zur Auflockerung des Unterrichts eingesetzt. Zu einem repräsentativen Bild der Mathematik, das der Lehrer schließlich vermitteln möchte, gehört meiner Meinung nach aber auch, zumindest exemplarisch an einigen Stellen, ihre historische Entwicklung.

Die Kegelschnitte bieten für die Behandlung von historischen Aspekten exzellente Voraussetzungen – schließlich haben sie die Mathematiker seit über 2000 Jahren beschäftigt. Insbesondere stehen sie in enger Verbindung mit den drei großen Problemen der Antike, an denen die Mathematik gewachsen ist.

Im Gegensatz zur gegenwärtigen Mathematik, die sich bereits so extrem spezialisiert hat, dass sie für den Laien nicht mehr verständlich ist, kann den Schülern anhand der Entwicklung der Kegelschnitte die Genese mathematischer Erkenntnisse näher gebracht werden. Dabei sollen sie auch erfahren, dass Mathematik von Menschen „gemacht“ wurde, dass diese auch Fehler begangen haben und uns heute naheliegende Weiterentwicklungen seinerzeit nicht erkannt haben (etwa, dass in der Antike Gleichungen geometrisch gelöst wurden, anstatt algebraisch), kurzum, dass Mathematik nicht so perfekt und vollkommen war und ist, wie sie für Schüler oft erscheinen mag.

Der Zugang über Flächenverwandlungen ist ein für den Mathematikunterricht durchaus interessanter Einstieg, der prädestiniert scheint, am besten nach der genetischen[97] Unterrichtskonzeption gestaltet zu werden:

[97] „Genetisch“ ist nicht automatisch mit „historisch“ gleichzusetzen – denn letzteres bedeutet, dass man dem Schüler direkt die Entdeckung in ihrer ganzen Dramatik vorführt und solcherart die Fragestellungen, Begriffe und Tatsachen vor ihnen entstehen lässt. Die Geschichte der Mathematik liefert aber oft auch Anregungen (z.B. Informationen über den eigentlichen Sinn, den wirklichen Kern eines Begriffes), die dem Lehrer helfen können, einen schülergerechten, genetischen Zugang zu einem mathematischen Gebiet zu konzipieren.

Unterrichtsformen

Die Einleitung – Erzählung der Sage von König Minos und dem Altar – wird vom Lehrer möglichst unterhaltend und fesselnd erzählt. Ziel dieser Geschichte soll es sein, die Schüler zu motivieren und ihre positive Einstellung in den nachfolgenden Unterrichtsteil mitzunehmen. Auch Hippokrates´ Überführung des Problems der Würfelverdoppelung in das äquivalente Problem $a : x = x : y = y : 2a$ wird vom Lehrer präsentiert. Die Überprüfung der Gleichwertigkeit dieser Gleichung mit $x^3 = 2a^3$ sollte anschließend von den Schülern ohne weitere Hilfestellungen selbstständig durchgeführt werden können; schließlich muss nur die Variable y durch Gleichungsumformen eliminiert werden. Obwohl die Schüler das ungefähre Aussehen der Graphen der Gleichungen $y = x^2$ und $y = \frac{2}{x}$ im Kopf haben sollten (Schulstoff der 5. Klasse), wird man die Graphen visualisieren. Es bietet sich an, von den Schülern einen näherungsweisen Wert für $\sqrt[3]{2}$ graphisch ermitteln zu lassen und somit auch gleich das graphische Lösen von Gleichungen zu wiederholen.

Danach wird der Lehrer erwähnen, dass Menaichmos entdeckte, dass Hyperbel und Parabel als ebene Schnitte an geraden Drehkegeln auftreten. Allerdings wird man als Lehrer zu diesem Zeitpunkt noch nicht näher auf diese Tatsache eingehen. Falls ein Plexiglasmodell eines Kegels zur Hand ist, können durch Eintauchen in Wasser bei unterschiedlicher Neigung des Kegels die jeweiligen Schnittkurven erkennbar gemacht werden.

Wie in der Antike quadratische Gleichungen mittels Flächenverwandlungen gelöst wurden, wird durch den Lehrer vorgeführt. Um zu überprüfen, ob die Schüler die Konstruktion der Flächenverwandlung verstanden haben – sprich: ob sie die symbolische Darstellungsform mit der ikonischen verknüpfen konnten –, empfiehlt es sich, die Zeichnung und den Konstruktionsgang von ihnen beschreiben zu lassen.

Durch die Verwandlung jeweils eines Rechtecks in ein flächengleiches Quadrat können zwar die Gleichungen der Kegelschnitte hergeleitet werden, jedoch kann der Schüler zu diesem Zeitpunkt das genaue Aussehen der Kurve noch nicht erahnen[98]. Um die Neugier und den Forscherdrang aber nicht erlahmen zu lassen, ist es wichtig, dass nicht allzu viel Zeit beim Konstruieren der Flächenverwandlungen verstreicht; man wird von den drei Kurven vielleicht jeweils einen Punkt tatsächlich konstruieren[99], damit die Bedeutung der Namen erklärt werden kann, im Großen und Ganzen aber schauen, dass man den roten Faden nicht verliert.

Es bietet sich an dieser Stelle an einen kurzen Vergleich mit den Bedeutungen der Begriffe Ellipse, Hyperbel und Parabel in den Sprachwissenschaften anzustellen (*informelle Einführung von Begriffen aus dem Kontext heraus, Querverweise zu anderen Fächern*).

Zum exemplarischen Herleiten (damit ist dem Lehrplan Rechnung getragen) der Kegelschnittsgleichungen[100] über Flächenverwandlungen würde ich eine gemeinsame Erarbeitung mit den Schülern im fragend-entwickelnden Unterrichtsstil vorschlagen.

Die Kegelschnitte werden nicht in Hauptlage eingeführt, sondern es wird zuerst ein allgemeiner Fall behandelt. Bevor die Vereinfachung der Kegelschnittsgleichungen durch Verschieben des Koordinatenursprungs erklärt werden kann, ist es ratsam, sich zuvor die Koordinatentransformation anhand eines Beispiels (etwa an der Kreisgleichung $x^2 + y^2 = r^2$, bei der man z.B. x durch $x + a$ ersetzt und erläutert, wie sich die Lage des Ursprung ändert) zu überlegen.

Durch die einheitliche Herleitung, kann der Zusammenhang der Kegelschnitte verdeutlicht werden, sodass Ellipse, Parabel und Hyperbel für die Schüler nicht mehr als wahllos hintereinandergefügte Lerninhalte erscheinen (*Integrationsprinzip, Vernetzung*).

---

[98] Dies gilt insbesondere für die Ellipse und die Hyperbel, welche hier in einer für die Schüler ungewohnten, gedrehten Lage in Erscheinung tritt.

[99] Es empfiehlt sich, jeden Schüler einen anderen Punkt konstruieren zu lassen und dann die Koordinaten der gezeichneten Kegelschnittpunkte durchgeben zu lassen, um so eine ungefähre Idee von der Kurvengestalt zu erlangen (*aktives Lernen*).

[100] Da es sich bei Ellipse und Hyperbel um analoge Beweisführungen handelt, kann die verbleibende Herleitung der Hyperbel nach kurzer Erklärung der Konstruktionsanleitung von den Schülern als Hausübung durchgeführt werden (*aktives Lernen, Stabilisierung des Lehrstoffs*).

Dem Lehrer bietet sich dann die Möglichkeit, die Kegelschnitte entweder getrennt voneinander zu behandeln (Brennpunktsdefinition, ...), oder in einem ganzheitlichen Aspekt, indem er am Parameter p, der bei diesem Zugang von Anfang an für alle Kegelschnitttypen geprägt wird, anknüpft und direkt zur gemeinsamen Scheitelgleichung weiterleitet.

Um die Verwandlung der Kegelschnitte bei konstantem p aber variierendem ε visualisieren zu können, empfiehlt sich der Computereinsatz[101] mit dessen Hilfe besonders rasch und exakt konstruiert werden kann. Äußerst eindrucksvoll ist es, den dynamischen Prozess der Veränderung als Film ablaufen zu lassen.

Als Anstoß zu weiteren Beobachtungen kann dann die Untersuchung der Wanderung der Brennpunkte vorgeschlagen werden. Diese Aufgabe kann durch selbstständiges Erforschen und Überlegen von den Schülern gelöst werden.

Auch der letzte Charakterisierungspunkt des genetischen Lernens ist erfüllt: Während des Voranschreitens des Lernprozesses kommt es zu einer allmählichen Erweiterung und Präzisierung des Kegelschnittbegriffs. Anfangs sind die Kegelschnitte nur durch Flächenverwandlungen definiert, dann kann sich der Schüler mit Hilfe der Zeichnung ein Bild von ihnen machen, bis schließlich die Idee der Flächenverwandlungen in die heute übliche Darstellungsform der Scheitelgleichung übergeführt wird. Die daran anschließende genauere Einzeluntersuchung der Kegelschnitte wird man den Schülern sicherlich nicht ersparen; so z.B. erhalten die Lernenden durch das Kennenlernen der Brennpunktsdefinition ein Werkzeug, durch das die Konstruktion der Kegelschnitte erheblich erleichtert wird.

[101] Falls keine ausreichende Zahl an Computern zur Verfügung steht, bzw. die Schüler nicht gewöhnt sind, mit einem Geometrie-Programm zu arbeiten, sodass die Einarbeitungsdauer zu viel Zeit in Anspruch nehmen würde, empfiehlt sich als Alternative der Einsatz von vorbereiteten Folien, die mittels Overheadprojektors an die Wand projiziert werden.

Dieser Zugang erfordert nur wenige elementare Kenntnisse von den Schülern:

Voraussetzungen beim Schüler

Hantieren mit Gleichungen (Umformen und Lösen)
Höhensatz, Thaleskreis
Kreis, Kreisgleichung (Kenntnis nicht zwingend nötig, aber sowohl inhaltlich als auch für das Verständnis vorteilhaft)
Verschieben von Funktionsgraphen (Koordinatentransformation)

Durch das Anknüpfen an das Vorwissen und an das Vorverständnis der Schüler kann das neue Wissen leichter erworben werden, da es mit Altbekanntem, welches bei dieser Gelegenheit auch gleich wiederholt wird, verbunden werden kann (*Prinzip der Stabilisierung, Forderung nach Anschaulichkeit*)[102].

[102] Vgl. KRONFELLNER, 1997, S. 83-100, und BÖHM, 1994, S. 46f.

2.4. Die Kegelschnitte als Kegel-Schnitte

Allzu oft geht die Behandlung der Kegelschnitte am Schüler vorüber, ohne dass der Oberbegriff „Kegelschnitt“ sinnvoll erklärt und der Zusammenhang der einzelnen Kegelschnittkurven begründet worden wäre.

Durch diesen Zugang kann dem Schüler die Namensgebung verständlich gemacht werden. Auch wird durch eine einheitliche Einführung aller Kegelschnitte ihr Zusammenhang verdeutlicht. Ohne besonderen Aufwand und auf anschauliche, einfache Art und Weise können dabei auch entartete Kegelschnitte als ebene Schnitte eines Drehkegels bzw. Zylinders eingeführt werden (*Integrationsprinzip*).

In der Unterstufe haben die Schüler die Kegelschnitte völlig isoliert voneinander kennen gelernt. Die Hyperbel trat als Graph des indirekt proportionalen Verhältnisses in Erscheinung, die Parabel wurde als Graph der quadratischen Funktion vorgestellt und allenfalls wurde auch die Ellipse in Form der Gärtnerkonstruktion durchgenommen. Um die Kegelschnitte nun unter einem ganzheitlichen Aspekt zu betrachten, bietet sich dieser Zugang an.

Als Einstieg empfiehlt es sich, die Frage aufzuwerfen, welche Figur entsteht, wenn man einen Kegel eben schneidet. Die auftretenden Vermutungen und zugehörigen Argumentationen (diese tragen zur Förderung der Raumvorstellung bei) können mit einem Kegelschnittmodell auf Richtigkeit überprüft werden.

Man kann auch die Lichtkegel eines zylinderförmigen Lampenschirms beobachten. Wem das Mitbringen einer Lampe zu aufwändig ist, der kann auch das Auftreten der Kegelschnitte als Schattenlinien eines Kreises bei punktförmiger Beleuchtung (Taschenlampe oder Kerze) beobachten.

Üblicherweise werden zuerst der Kreis und die zerfallenden Kegelschnitte als Schnittfiguren entdeckt. Auch die ungefähre Gestalt der Ellipse können einige Schüler beschreiben. Nur wenige vermögen dann allerdings auch die Parabel und die Hyperbel als Schnittfiguren anzugeben.

Bei dieser Gelegenheit kann man auch gleich explizit darauf hinweisen, dass, um eine Hyperbel zu erzeugen, die Schnittebene nicht notwendigerweise parallel zur Kegelachse sein muss, wie Schüler oft fälschlicherweise aus Modellen schließen.

Das räumliche Vorstellungsvermögen ist bei vielen Menschen nur schlecht ausgebildet; da es aber für einige Berufssparten unerlässlich ist, sollte der Förderung dieser Fähigkeit im Schulunterricht eine größere Bedeutung zukommen.

„Verfügbar" werden die Kegelschnitte aber erst durch das Grundriss-Aufriss-Verfahren. Dieses sollte für alle eigentlichen Kegelschnitte geübt werden (*Verbindung zur Darstellenden Geometrie*).

Voraussetzungen beim Schüler

Damit die Schüler die Herleitung der Brennpunktsdefinition mittels Dandelinschen Kugeln verstehen können, müssen im Unterricht die Kugel und die Kugeltangente bereits vorher durchgenommen worden sein.

Unterrichtsformen

Für die Herleitung der Kegelschnittsdefinitionen und der numerischen Exzentrizität würde ich ein Abwechseln aus Lehrervortrag und gemeinsamem Erarbeiten mit den Schülern im fragend-entwickelnden Unterrichtsstil vorschlagen, wobei vom Lehrer angeregte Teilaufgaben durch selbstständige Überlegungen von den Schülern gelöst werden können, wie etwa das Zeigen der Äquivalenz der numerischen Exzentrizität ε mit dem ε aus der Ellipsengleichung $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \varepsilon\left(\overline{PL_1} + \overline{PL_2}\right) = 2a$.

Die Schüler sollen im Stande sein, die Analogbeweise für die Parabel und die Hyperbel selbstständig durchzuführen (*Anwenden bereits vorhandenen Wissens in neuen Situationen*). Dieser Teil stellt zugleich auch eine Kontrollfunktion über den Lernerfolg im vorangegangenen Unterricht dar.

2.5. Brennpunktsdefinition

Der Zugang zu den Kegelschnitten, der von der Brennpunktsdefinition ausgeht, ist der in der Schule am häufigsten gewählte Weg. Alle derzeit aktuellen Oberstufen-Schulbücher eröffnen das Kapitel der Kegelschnitte mit der Brennpunktsdefinition der Ellipse.

Ausschlaggebend dafür ist sicherlich, dass man bei diesem Zugang die Kegelschnitte sehr anschaulich einführen kann. Außerdem bietet sich reichlich Gelegenheit zu Schüleraktivitäten und überdies wird dieser Einstieg von Lehrern auch oft favorisiert, weil der Zeitaufwand für die Einleitung sehr gering ist – sobald man die Definition formuliert hat, steht man auch schon mitten im Geschehen.

Es ist allerdings zu befürchten, dass einige Schüler abgeschreckt werden, wenn sie gleich zu Beginn eines neuen Teilgebiets der Mathematik mit einer für sie noch unverständlichen Definition konfrontiert werden. Dies gilt insbesondere für Schüler der 4. Klasse. Schüler der Oberstufe sollten bereits so vertraut sein mit Begriffen wie „Menge“, „Ebene“, „Abstand“ und „Konstante“ ebenso wie mit der symbolischen Schreibweise der Definition, dass sie mit diesem rein formal gehaltenen Einstieg keine Verständnisprobleme haben sollten.

Die punktweise Konstruktion – also die Überführung der symbolisch formulierten Kegelschnittsdefinition in eine Zeichenanleitung (enaktive Darstellungsform) – sollte dann aber jedem Schüler die Brennpunktsdefinition verständlich machen. Der Wissenstransfer zwischen den Darstellungsformen kann dadurch erleichtert werden, dass man die Schüler die Zeichnung beschreiben lässt. Der Begriffsbildungsprozess wird durch die konkrete Handlung des Zeichnens unterstützt – vor allem bei der Gärtnerkonstruktion der Ellipse, die eine eins zu eins Übersetzung der symbolischen in die enaktive Darstellungsform darstellt (*operatives Prinzip, aktives Lernen, Wechsel zwischen den Darstellungsebenen*).

Bei Schülern der Oberstufe kann es genügen – insbesondere, falls die Gärtnerkonstruktion bereits in der Unterstufe durchgenommen wurde –, wenn die Handlung des mit dem Bleistift am gespannten Faden Entlangfahrens nur geistig vorgestellt wird, ohne sie konkret durchzuführen. Diese Stufe der verinnerlichten Handlungen ist bei älteren Schülern anzustreben, auch wenn konkrete Handlungen vorangestellt werden.[103]

Die Herleitung der Kegelschnittgleichungen stellt keine großen Anforderungen an das Vorwissen der Schüler (Gleichungenlösen). Dass Quadrieren im Allgemeinen keine Äquivalenzumformung ist, wird man kurz an einem konkreten Beispiel (etwa: $3^2 = 9$ ebenso wie $(-3)^2 = 9$) verdeutlichen. Um die Äquivalenz von Kegelschnittsgleichung und Brennpunktsdefinition zu sichern, muss folglich auch die Umkehrung gezeigt werden.

Beweise und Herleitungen, die anhand eines Kegelschnitttyps vorexerziert wurden – sei es nun als Lehrervortrag oder im fragend-entwickelndem Unterrichtsstil –, können für die anderen beiden Kegelschnitte in ähnlicher Weise durchgeführt werden. Beim Beweis, dass aus der Kegelschnittsgleichung die Brennpunktsdefinition folgt, werden je nach Begabung der Schüler mehr oder weniger strategische oder inhaltliche Hilfestellungen notwendig sein.

Im Lehrplan ist zwar nur das exemplarische Herleiten der Kegelschnittgleichungen gefordert. Trotzdem bin ich der Meinung, dass man durchaus nach Besprechung der Ellipse, den Schülern die Herleitung der Hyperbelgleichung als Hausübung aufgeben kann, da ich glaube, dass man nur bei nochmaligem Durcharbeiten und -denken einen Beweis erst wirklich versteht. Warum sollte der Schüler sein erworbenes Wissen nicht gleich anhand eines Analogbeweises testen?

Die Selbsttätigkeit der Schüler gibt dem Lehrer zugleich die Möglichkeit, die Schüler zu beobachten und Rückschlüsse auf deren Lernfortschritt zu ziehen. Das Auftreten von Schwierigkeiten kann Aufschluss über Verständnisprobleme geben, die sonst unentdeckt geblieben wären.

Aus der Kegelschnittgleichung können einige Symmetriemerkmale (Achsen- bzw. Punktsymmetrie) herausgelesen werden, mit deren Hilfe Rückschlüsse auf das Aussehen der Kurve gewonnen werden können (*Interpretieren von Gleichungen*).

[103] DÖRFLER, 1979, S. 26-28

Bei der Hyperbelzeichnung bietet sich die Gelegenheit, über die Asymptoten zu sprechen. Das Vermuten der Eigenschaften (Beim Zeichnen der Diagonalen des Achsenrechtecks erhält man den Eindruck, dass sich die Hyperbeläste den Diagonalen immer mehr nähern) und das Hinführen zum Asymptotenbegriff, sowie zur Beweisidee sind Lernziele für deren Erarbeitung sich die Form des fragend-entwickelnden Unterrichts hervorragend eignet. Für einige Teilbereiche bietet sich auch die Form der selbstständigen Schülertätigkeit an.

Die Arbeitsaufträge an die Schüler könnten etwa wie folgt formuliert sein:

- Zeichne eine Hyperbel, in die du das Rechteck einzeichnest, dessen Seiten durch die Hauptscheitel A und B sowie durch die Nebenscheitel C und D der Hyperbel gehen und zu den Hyperbelachsen parallel sind. Zeichne dann die Geraden u und v, auf denen die Diagonalen des Rechtecks liegen. Was fällt dir auf?
- Stelle Gleichungen für die Asymptoten u und v der Hyperbel $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ auf.
- Eine Asymptote hat mit der Hyperbel keinen Punkt gemeinsam, nähert sich aber beliebig nahe. Beweise das!

Insbesondere beim letzten Punkt werden vermutlich einige anleitende Hilfestellungen von Lehrerseite nötig sein.

Zu jedem Kegelschnitttyp gibt es eine Fadenkonstruktion, die am besten vom Lehrer vorgezeigt und von den Schülern nachgeahmt wird. Die Konstruktion soll von den Schülern mit eigenen Worten begründet und die Formel interpretiert werden (dies ist insbesondere bei der Hyperbel nötig). Das Hantieren mit den Zeichengeräten wird zur enaktiven Darstellungsform gezählt, die Konstruktion wurde den Schülern in ikonischer Form präsentiert, während die Beweisführung auf symbolischer Darstellungsebene verlangt ist (*operatives Prinzip*, *Interaktion bzw. Wechsel der Darstellungsebenen*).

Da man nun Kurven konstanter Brennstreckensumme bzw. -differenz untersucht hat, liegt es nahe auch jene geometrischen Örter zu untersuchen, deren Produkt bzw. Quotient der Brennstrecken konstant ist. Obwohl diese weitere Vorgangsweise eine nach dem operativen Prinzip (was passiert mit …, wenn …?) durchaus logische wäre, werden diese Kurven im Schulunterricht üblicherweise nicht behandelt. Mir wäre auch nicht bekannt, dass ein Schüler nach dieser weiteren Vorgangsweise verlangt hätte.

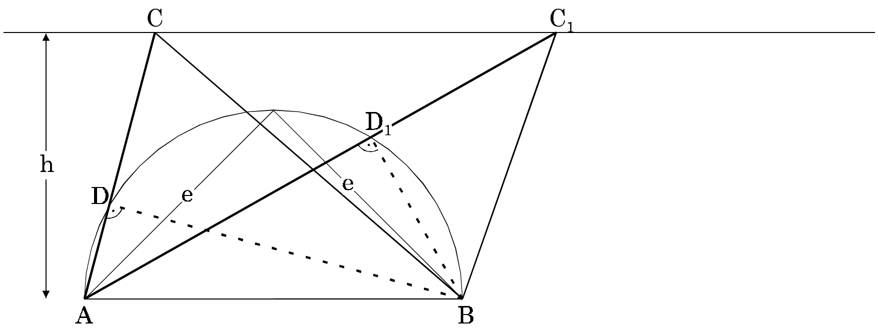
Cassinische Kurven

Die Cassinischen Kurven – die Kurven mit konstantem Brennstrahlenprodukt – werden von den meisten Leuten als hübsch empfunden.

Die Voraussetzungen für die Behandlung der Cassinischen Kurven sind elementarer Natur. Neben dem Gleichungslösen sind für eine Zeichnung mit Hand auch der geübte Umgang mit Zirkel und Lineal sowie die Kenntnis der Dreiecksflächenformel erforderlich.

Möchte man die Cassinischen Kurven mit der Hand zeichnen, so ist eine Hilfskonstruktion für $a * b = \text{const.}$ nötig.

Als Grundlage dafür dient das Wissen über Dreiecksflächen: $A_\Delta = \frac{c \cdot h_c}{2}$ bzw. $c \cdot h_c = 2A_\Delta$. Alle Dreiecke mit einer gegebenen Seite und Höhe haben denselben Flächeninhalt.



$$\overline{AB} * h = \overline{AC} * \overline{BD} = \overline{AC_1} * \overline{BD_1} = \overline{PF_1} * \overline{PF_2} = 2a = const$$

(*Anwenden von Wissen in neuen Situationen; Argumentieren*)

Bei von Hand angefertigten Zeichnungen ist allerdings oft als nachteilig zu vermerken, dass sie meist zeitintensiv und ungenau sind; statt der Freude an einer schönen Figur stellt sich Mißmut über eine schlechte Punktkonstruktion ein. Durch den Einsatz eines Computers lassen sich aber in vertretbarer Zeit präzise, eindrucksvolle Bilder dieser höheren Kurven erzeugen.

Auch die Visualisierung der jeweiligen Kurvengenese ist mit manchen Geometrieprogrammen möglich. Einen gewissen dynamischen Aspekt kann man in die Mathematik einbringen, indem man die Kurvengenese durch die Bewegung eines Punktes am Bildschirm darstellt.

Die Cassinischen Kurven bieten sich für eine anschließende Kurvendiskussion an; es müssen ja nicht immer irgendwelche Gleichungen 3. Grades diskutiert werden.

Ganz nebenbei kann kurz diskutiert werden, welche Kurven Funktionen sind, und welche nicht.

Apollonius-Kreis

Dies ist eine weitere Möglichkeit, einen Kreis als Ortslinie zu beschreiben.

- „Radiusdefinition" – der Kreis als Menge aller Punkte einer Ebene, die von einem festen Punkt (Mittelpunkt) gleichen Abstand (Radius) haben,
- Thaleskreis – der Kreis als geometrischer Ort aller Punkte einer Ebene, die zusammen mit dem Durchmesser ein rechtwinkeliges Dreieck bilden,
- Apollonius-Kreis

Um den Apollonius-Kreis zu erarbeiten, schlage ich folgende Vorgangsweise vor, die – da es sich hierbei um analoge Bildungsgesetze und Herleitungen handelt – durchaus auch als Hausübung bewältigbar ist: Ausgehend von der Brennpunktsdefinition soll der Apollonius-Kreis gezeichnet werden. Dann sollen die Vermutungen, dass es sich hierbei um einen Kreis handelt, durch das Herleiten der Gleichung bewiesen werden und aus der Kreisgleichung Mittelpunkt und Radius herausgelesen werden.

Soll der Kreis von Hand gezeichnet werden, so ist die Kenntnis des Strahlensatzes erforderlich. Weiters ist Wissen über die allgemeine Form der Kreisgleichung und eventuell auch über die Koordinatentransformationen gefordert.

Bilder von Kurven höherer Ordnung werden erfahrungsgemäß als reizvoll und schön empfunden; mit ein Grund ist, dass elementare Voraussetzungen genügen und so der Freude als Triebfeder für die Untersuchung dieser Kurven kein Hemmnis entgegensteht. Wenn die Schüler den Mathematikunterricht als faszinierend und attraktiv empfinden, ist automatisch auch der Lernerfolg gesichert.

Durch die systematische Auseinandersetzung können bei diesem Zugang Gemeinsamkeiten der Kegelschnitte herausgearbeitet werden (*Integrationsprinzip, Vernetzen von Wissen*).

Die vorgestellte unterrichtsmethodische Umsetzung dieses Zugangs stützt sich vor allem auf das operative Prinzip („Was geschieht mit …, wenn … ?“) und das aktive Lernen. Der Stoff wird auf allen drei Darstellungsebenen beleuchtet.

2.6. Leitliniendefinition und Hüllkurven

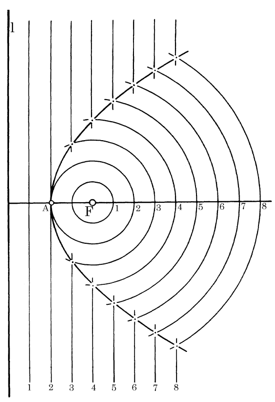
Dieser Zugang, bei dem die Kegelschnitte unter einem gemeinsamen, ganzheitlichen Aspekt (Leitliniendefinition $\overline{PF} = \overline{PL}$ bzw. Konstruktion als Hüllkurven) betrachtet werden (*Integrationsprinzip*), setzt am Vorwissen der Schüler an:

Gleich zu Beginn wird an Bekanntem angeknüpft. Die Definitionen von Streckensymmetrale und Winkelsymmetrale sind bereits aus der Unterstufe bekannt.

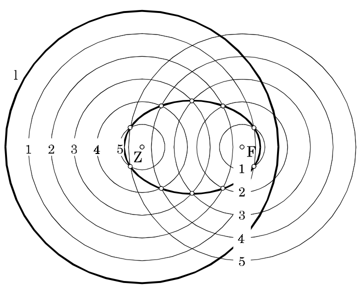
Daran anschließend wird ganz im Sinne des operativen Prinzips die Frage nach dem Aussehen der Menge aller Punkte, die von einem Punkt und einer Geraden denselben Abstand haben, aufgeworfen.

Um dieses geometrische Problem zu lösen bietet sich der Einsatz von Computern als neue Möglichkeit der Visualisierung an. Natürlich können diese Kurven aber auch ohne Computerhilfe gezeichnet werden.

Bei der Parabel und der Ellipse ist das noch relativ einfach, denn da ist der rein intuitive Ansatz erfolgsgekrönt.



Man kann beliebig viele Parabelpunkte konstruieren, indem man um den Punkt F eine Folge von konzentrischen Kreisen mit unterschiedlichen Radien zeichnet, die man mit einer Folge von zur Leitgeraden l parallelen Geraden in den Abständen der Kreisradien schneidet.[104]



Wenn man die Leitgerade durch einen Leitkreis ersetzt, lässt sich auf ähnliche Weise auch eine Ellipse konstruieren.

[104] Abbildung aus BARAVALLE, 1980, S. 116

Eine Hyperbel kann man dann aber nicht mehr einfach unter Verwendung der Leitliniendefinition $\overline{PF} = \overline{PL}$ als Konstruktionsanleitung erstellen; da muss man sich schon etwas anderes überlegen, denn das Zeichnen einer Schar konzentrischer Kreise führt hier nicht zum Ziel. Vielmehr muss man auf die Konstruktion der Kurvenpunkte als Schnittpunkte der Geraden durch Z und L mit der Streckensymmetrale zu $\overline{FL}$ $(L \in l)$ zurückgreifen; diese Art der Konstruktion hat auch schon bei der Parabel und der Ellipse bestens funktioniert. (Man erinnere sich an die Zeichnungen der Kegelschnitte als Hüllkurven.)

Falls der Schüler die Kurven vom Computer zeichnen lässt, wird er sich der eben beschriebenen Problematik der Konstruktion mit Zirkel und Lineal vermutlich nicht bewusst werden.

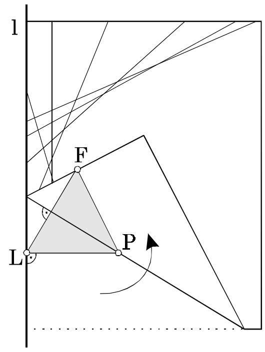
Mit Hilfe der Zeichnung des Netzes aus Parallelen und Kreisen lässt sich übrigens die einheitliche Form aller Parabeln[105] leicht erklären. Bei Vergrößerung wird das Netz weitmaschiger, während bei Verringerung des Abstands zwischen F und l das Netz automatisch engmaschiger um das Ähnlichkeitszentrum F aufgespannt wird. Diese Eigenschaft der Parabeln, sich voneinander nur in der Größe zu unterscheiden, trifft man auch bei Kreisen an, nicht jedoch bei Ellipsen und Hyperbeln.

Die Konstruktion einer Parabel als Hüllkurve lässt sich auch einfach durch das Falten eines Blattes Papier realisieren.

Ein Bogen Papier, auf den ein Punkt F gezeichnet ist, und eine Kante als Leitlinie fungiert, lässt sich so falten, dass die Knicklinien Parabeltangenten bilden, die die Parabel einhüllen: Einzige Bedingung ist, dass beim Falten die Leitlinienkante des Papiers stets durch den Brennpunkt läuft.[106]

[105] Um kein Missverständnis aufkommen zu lassen: Ausschnitte von Parabeln können sehr wohl unterschiedliche Gestalt haben; wenn man sich jedoch das Parabelstück bis ins Unendliche fortgesetzt vorstellt, kann man jedes beliebige davon nehmen, den Maßstab in geeigneter Weise verändern und auf eine andere unendlich lange Parabel legen, auf die es dann genau passt.

[106] GARDNER, 1981, S. 16



Es ist darauf zu achten, dass den Schülern die Äquivalenz des Sachverhalts des Papierfaltens und der Hüllkonstruktion bewusst wird, sodass das Papierfalten von den Schülern nicht nur als willkommene Abwechslung gesehen wird, sondern auch in Zusammenhang mit der Theorie gebracht wird und so mit altbekanntem Wissen verknüpft werden kann (*Wechsel und Verknüpfung unterschiedlicher Darstellungsebenen*).

Bemerkungen zum Tangentenbegriff

Eine Kreistangente ist definiert als eine Gerade, die mit einem Kreis genau einen Punkt gemeinsam hat.

Diese Definition gilt auch uneingeschränkt für die Ellipse, jedoch nicht für Parabeln und Hyperbeln. Bei der Parabel darf die Tangente nicht parallel zur Parabelachse liegen, während bei der Hyperbel die Gerade nicht parallel zu einer der beiden Asymptoten sein darf.

Dies lässt sich am einfachsten folgendermaßen erkennen:[107]

Schneidet man die Parabel $y^2 = 2px$ mit der Geraden $y = kx + d$, so erhält man

$$(kx+d)^2 = 2px$$
$$k^2x^2 + 2(dk-p)x + d^2 = 0$$

im Fall $k \neq 0$

$$x_{1,2} = \tfrac{p-dk}{k^2} \pm \tfrac{1}{k^2}\sqrt{p(p-2dk)}\,,$$

[107] Dazu müssen allerdings bereits die Kegelschnittsgleichungen bekannt sein, deren Herleitung in diesem Kapitel nicht erwähnt wurde, da die Einführung genauso wie im Kapitel „Brennpunktsdefinitionen“ beschrieben, erfolgen kann.

wobei die Diskriminante über die Existenz gemeinsamer Schnittpunkte Auskunft gibt:

$p-2dk>0$ Die Gerade und die Parabel haben zwei verschiedene Punkte gemeinsam; die Gerade ist eine Sekante der Parabel.

$p-2dk=0$ Die Gerade und die Parabel haben einen gemeinsamen Punkt; die Gerade ist eine Parabeltangente.

$p-2dk<0$ Die Gerade schneidet die Parabel nicht; es handelt sich um eine Passente der Parabel.

im Fall $k=0$

$$-2px+d^2=0$$

Schneidet man also die Parabel $y^2=2px$ mit einer zur Parabelachse parallelen Geraden $y=d$, so ergibt sich eine lineare Gleichung mit der Variablen x: $x=\frac{d^2}{2p}$.

Wenn man die Hyperbel $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ mit einer Geraden $y=kx+d$ schneidet, erhält man

$$b^2x^2-a^2(kx+d)^2=a^2b^2$$
$$(a^2k^2-b^2)x^2+2a^2dkx+a^2(b^2+d^2)=0$$

für $a^2k^2-b^2\neq 0$

$$x_{1,2}=\frac{-2a^2dk\pm\sqrt{4a^4d^2k^2-4\left(a^2k^2-b^2\right)\left(a^2b^2+a^2d^2\right)}}{2\left(a^2k^2-b^2\right)}$$

$$x_{1,2}=\frac{-a^2dk\pm\sqrt{a^4d^2k^2-a^4b^2k^2+a^2b^4-a^4d^2k^2+a^2b^2d^2}}{a^2k^2-b^2}$$

$$x_{1,2}=\frac{a}{a^2k^2-b^2}\left(-adk\pm b\sqrt{b^2+d^2-a^2k^2}\right)$$

Auch hier ist die Diskriminante entscheidend dafür, wie viele Punkte die Gerade und die Hyperbel gemeinsam haben:

$b^2+d^2-a^2k^2>0$ Die Gerade ist eine Sekante der Hyperbel.

$b^2 + d^2 - a^2k^2 = 0$ Die Gerade ist eine Hyperbeltangente.

$b^2 + d^2 - a^2k^2 < 0$ Die Gerade ist eine Passante der Hyperbel.

für $a^2k^2 - b^2 = 0$, somit ist $k^2 = \frac{b^2}{a^2}$ bzw. $k = \frac{b}{a}$ oder $k = -\frac{b}{a}$, d.h. die Hyperbel $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ wird mit der Geraden $y = +\frac{b}{a}x + d$ bzw. $y = -\frac{b}{a}x + d$ geschnitten, so erhält man

für $d = 0$

$0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + a^2 \cdot b^2 = 0 \quad \rightarrow \quad L = \{\ \}$ Die Gerade ist eine Asymptote.

für $d \neq 0$

Aus $0 \cdot x^2 + 2a^2dkx + a^2(b^2 + d^2) = 0$ ergibt sich für die Variable x eine lineare Gleichung $x = +\frac{ab^2+ad^2}{2bd}$ (bzw. $x = -\frac{ab^2+ad^2}{2bd}$). Eine zu einer Asymptote parallele Gerade hat genau einen Punkt gemeinsam mit der Hyperbel.

Da diese Eigenschaft auch auf die Tangente zutrifft, muss die Tangentendefinition genauer bestimmt werden:

Def.: Eine Gerade heißt Tangente, wenn sie mit einem Kegelschnitt genau einen Punkt gemeinsam hat und dieser die *Doppellösung einer quadratischen Gleichung* ist.

(*Probleme des Definierens*)

Exkurs über Computer

Unbedingt erforderlich ist es, die Schüler einzuschulen, bevor man sie auf die Computer loslässt. Die Funktionsweise, das Können und die Benützung des Programms müssen erklärt werden.

Seitdem es brauchbare Software zur experimentellen Geometrie gibt, muss nicht mehr mit Ellipsen-, Hyperbel- und Parabelschablonen, deren Parameter man nicht ändern kann, gearbeitet werden.

Weil Konstruktionen rasch und einfach verändert werden können, wird das Vermuten und Entdecken von Eigenschaften erheblich vereinfacht bzw. überhaupt erst ermöglicht.

Computer können auch helfen, vergleichsweise schnell eine Schar von Linien zu zeichnen, durch deren Gesamtheit erst ein Sachverhalt demonstriert werden kann. Dies trifft etwa auf die Konstruktion der Kegelschnitte als Hüllkurven zu. Als weiterer Vorteil des Computers ist zu verbuchen, dass Hilfslinien unsichtbar gemacht werden können (*Computer als Werkzeug zur Übernahme von Routinetätigkeiten und zur Simulation dynamischer Systeme*).

Computer eigenen sich ausgezeichnet für systematisches Probieren[108]; so können die Schüler Zusammenhänge entdecken. Der Computer kann als Bindeglied zwischen naivem Denken und formalem Agieren fungieren und erleichtert damit die Exaktifizierung der Begriffe.

So können die Schüler Fragen stellen, anstatt Antworten auf ungestellte Fragen zu erhalten. Die Sätze sollen dennoch auch bewiesen werden; natürlich können mit Computerhilfe in einer kurzen Zeit relativ viele Spezialfälle überprüft werden – und kein Schüler nimmt ernsthaft an, dass er es hierbei nur mit Ausnahmefällen zu tun hat. Durch die Beweisführung soll jedoch mehr Einsicht in die Zusammenhänge gewonnen werden. Ob die Beweise nun elementargeometrisch, analytisch oder mit Hilfe der Vektorrechnung geführt werden, sei ganz allein den Schülern überlassen.

Der Computer ist ein approbiertes Medium, mit dem man Schüler eigenständig und selbstständig kontrolliert arbeiten lassen kann. Was keineswegs bedeutet, dass der Vorbereitungsaufwand für den Lehrer dadurch geringer wäre; es müssen Fragestellungen überlegt werden, anhand derer die Schüler dann eigenständig zum Forschen und Arbeiten angeregt werden können. Auch während der Schulstunde kann man sich nicht zurücklehnen, sondern muss immer mit Rat

[108] Er eignet sich beispielsweise hervorragend, um zu beobachten, wie sich das Aussehen der Kegelschnitte verändert, wenn der Abstand zwischen l und F variiert wird, oder auch, um die Hüllkonstruktionen rasch und präzise durchzuführen.

und Tat bereitstehen, soll doch die Motivation der Schüler aufrecht erhalten bleiben.[109]

Wie man diesen Zugang als entdeckendes Lernen konzipieren kann, ist sehr gut im Artikel von Jörg MEYER beschrieben.

Im Folgenden sind Arbeitsaufträge vorgeschlagen, durch deren Bearbeitung am Computer die Schüler einiges über Kegelschnitte lernen sollen. Die Arbeitsaufträge sind für eine Einzelarbeit formuliert, können aber selbstverständlich auch als Partnerarbeit behandelt werden. Insbesondere bei den Beweisen kann eine Diskussion unter Banknachbarn anregend wirken und zu besseren Ergebnissen führen.

A1 Zeichne die Menge aller Punkte einer Ebene, die von zwei Punkten F, G denselben Abstand haben.

A2 Wie sieht jene Menge aller Punkte aus, die von zwei Geraden l, m denselben Abstand haben?

A3 Zeichne nun die Menge aller Punkte einer Ebene, die zu einem Punkt F und einer Geraden l denselben Abstand haben.

Man lässt hier dem Schüler selbst seine Wissenslücken bewusst werden, ohne es ihm ausdrücklich zu sagen. Wenn der Schüler selbst darauf kommt, kann eine stärkere Motivation erzielt werden als wenn der Lehrer ihm sagt, dass er etwas nicht weiß.

Bei der Parabel werden genaue Fragestellungen und Hilfen zum Erforschen, Entdecken und Beweisen von Eigenschaften gegeben.

Allgemeine Parabeleigenschaften:

P1 Diese Ortskurve wird Parabel genannt. F heißt Brennpunkt und l Leitgerade. Schreibe dazu ein Makro, das zu F und einem beliebigen Punkt L auf l den Parabelpunkt P zeichnet und experimentiere damit. Wie verändert sich das Aussehen, wenn der Abstand zwischen F und l verändert wird?

---

[109] FUCHS, 1997, S. 21-35

P2 Der Scheitelpunkt der Parabel heißt S. Wo liegt er, und was lässt sich über die Symmetrie der Parabel sagen?

P3 Es sei M die Mitte von F und L. Begründe: $\overline{FL}$ steht normal auf $\overline{MP}$. $\overline{MP}$ halbiert den Winkel $\sphericalangle FPL$.

P4 Was passiert mit M, wenn L auf l bewegt wird? Begründe, warum das so ist?

P5 Verifiziere: Die Gerade durch M und P berührt die Parabel in P. Es handelt sich also um die Parabeltangente durch P. Weshalb ist das so?

Nachdem nun die allgemeinen Parabeleigenschaften erarbeitet wurden, kann man anhand von Konstruktionsaufgaben überprüfen, inwieweit der Lehrstoff verstanden wurde.

P6 Gegeben sei der Parabelbrennpunkt F, die Parabelachse und ein Parabelpunkt P. Wie konstruiert man die Tangente t durch P?

P7 Nun seien der Brennpunkt F, die Parabelachse und eine Parabeltangente t gegeben. Konstruiere den Parabelpunkt P auf t.

Besonders die letzte Aufgabe erfüllt eine Kontrollfunktion bezüglich des Verständnisses, denn sie ist nur lösbar, wenn der Schüler die Zusammenhänge erkannt hat (*produktives geistiges Arbeiten*).

Die Fragen und Aufforderungen zur Erarbeitung der Ellipse werden dann schon weniger eng formuliert.

Nach der Aufforderung nun all jene Punkte zu untersuchen, die von einem Kreis l und einem Punkt F innerhalb von l denselben Abstand haben, wird die Lösungskurve als Ellipse definiert und der Kreis l als Leitkreis bzw. der Punkt F als Brennpunkt bezeichnet.

Wiederum soll von den Schülern ein Makro, das zu F, Z und L den Ellipsenpunkt P zeichnet, erstellt werden, mit dessen Hilfe dann durch Experimentieren der Fragestellung nachgegangen werden soll, wie sich das Aussehen der Ellipse verändert, wenn der Abstand zwischen F und l verändert wird. (**E1**)

E2 Die Scheitelpunkte A und B der Ellipse liegen jeweils genau in der Mitte zwischen F und l. Was lässt sich über die Symmetrie der Ellipse sagen?

Um die Eigenständigkeit der Schüler zu fördern, werden hier weniger Hilfestellungen gegeben; es ist verlangt, gewisse Parabeleigenschaften auf die Ellipse zu übertragen:

E3-E5 Übertrage **P3-P5** auf die Ellipse. Ersetze dabei den Parabelbegriff der „Leitgeraden l" durch den entsprechenden Ellipsenbegriff „Leitkreis l".

Die Hyperbel ist von den Schülern schon fast ausschließlich selbst organisiert zu erarbeiten.

H1 Was passiert, wenn man die Konstruktion der Ellipse auch für den Fall ausführt, dass F außerhalb des Leitkreises liegt? Übertrage die bei der Ellipse angestellten Überlegungen auf die Hyperbel. Schreib dazu geeignete Makros und experimentiere mit ihnen. Wie ist die Definition des „Abstands $\overline{Pl}$ als kürzeste Entfernung $\overline{PL}$ für Punkte L auf dem Kreis l" abzuändern?[110]

Natürlich darf man die Schüler beim Arbeiten nicht gänzlich allein ihrem Schicksal überlassen, sondern muss nötigenfalls Hilfestellungen anbieten und laufend motivierend eingreifen, denn sonst werden die Schüler wohl irgendwann demotiviert von den Arbeitsaufträgen ablassen.

Wenn man den Punkt L auf dem Leitkreis wandern lässt und jeweils den dazugehörigen Hyperbelpunkt P samt Tangente konstruiert, so erkennt man, dass es u.a. auch Tangenten durch das Hyperbelzentrum O gibt. Versucht man nun zu diesen Tangenten den Berührpunkt P zu konstruieren, erkennt man, dass dieser im Unendlichen liegt. Solche vermeintlichen Tangenten heißen Asymptoten.

Für die Erarbeitung des Asymptotenbegriffs empfiehlt es sich, auf die fragend-entwickelnde Unterrichtskonzeption zurückzugreifen.

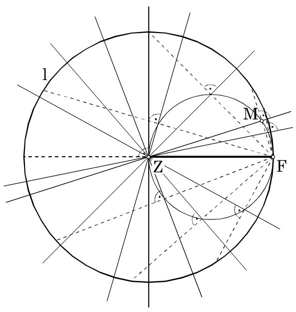
[110] Vgl. MEYER, 1995, S. 36-42

Bemerkung zu Hüllkonstruktionen und Rotationsspiegeln

Es empfiehlt sich, die Konstruktionsanleitung der Hüllkurven für einen Kegelschnitttyp vorzugeben und die Schüler ganz naiv probieren und am Computer zeichnen zu lassen, bis die ersten Schülerreaktionen eintreten (*Beschreiben, Argumentieren und Begründen des Sachverhaltes*).

Die Schüler sollen lernen, den Angabetext richtig in eine Zeichnung oder Skizze zu übertragen (ikonische Darstellungsebene); durch diese bildliche Darstellung sollte es ihnen leichter fallen, den Sachverhalt zu verstehen und mit eigenen Worten zu beschreiben (*Argumentieren und Interpretieren*).

Die Hüllkonstruktionen eignen sich zur Wiedereinführung der Kegelschnitte, da ein dem Schüler bekanntes Stoffgebiet aus einem anderen Kontext heraus behandelt wird. Man kann deren Behandlung aber auch zur Auflockerung und Abwechslung in den Unterricht einbauen (*Wiederholung, Motivation*).



Die Abbildung zeigt den Spezialfall, wo der Punkt F so gewählt wird, dass er auf dem Kreis zu liegen kommt; es wird eine Strecke eingehüllt.

Die Mechanismen der Rotationsspiegel können mit Baukästen wie Fischertechnik leicht nachgebaut werden.

Schlussbemerkung

Bei diesem Zugang, dem das operative Prinzip zu Grunde liegt, erfahren und erleben Schüler, dass Mathematik kein starres System von Regeln, Definitionen und Sätzen ist, sondern als ein dynamischer Prozess gesehen werden kann, der permanent durch Vermutungen, vorläufigem Begriffsbilden (etwa Tangentenbegriff), Widerlegungen, neuen Anläufen, usw. geprägt ist. Erraten, Vermuten, Schließen, Experimentieren, Probieren – all diese Tätigkeiten betonen die schöpferische Komponente der Mathematik; die Schüler erhalten eine Idee davon, wie die Genese von mathematischem Wissen abläuft.

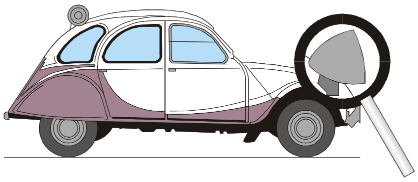
Diese Art des Unterrichts stützt sich sehr stark auf das heuristische Prinzip. Man lässt die Schüler selbst suchen, wodurch der Ausgang der Unterrichtsstunde nicht planbar ist. Da allerdings die Prüfungsorientiertheit unseres Schulsystems dem heuristischen Prinzip widerspricht, kann die Präsentation in dieser Form eher nur im Wahlpflichtfach durchgeführt werden.

2.7. Kegelschnitte im täglichen Leben

Didaktisches Bemerkungen zum Thema Motivation

Alle Mathematikprofessoren haben irgendwann schon die von Schülern gestellte Frage „Wozu braucht man das?“ gehört. Wenn der Lehrer dann mit „Das dient in der Technik zum Bauen von Brücken, …“ antwortet, erwidert der Schüler zwar meist brav „Ach ja“, aber wirklich zufriedengestellt ist er mit dieser Antwort des Lehrers nicht.

Wenn er aber im Gegenzug die Wurflinie eines geworfenen Balls zu sehen bekommt, oder der Lehrer einen kleinen Parabolspiegel in die Sonne hält, dessen Brennpunkt stark erleuchtet ist, kann beim Schüler eine gewisse Motivation geweckt werden. Schließlich verwenden Autoscheinwerfer, in dessen Brennpunkt sich die Lichtquelle befindet, genau dieses Prinzip, um den Lichtstrahl gezielt auf die Straße zu richten.



Besonders beeindruckend ist es, wenn man den Schülern den Scheinwerfer eines Citroën-2CV-Autos (auch unter dem Namen „Ente“ bekannt) zeigen kann.

Schüler sind auch immer sehr empfänglich für die mathematische Betrachtung der Schatten (von der Sonne oder einer Lampe), da sie die Schatten auch später, wenn sich ihr mathematischer Wissensstand erweitert hat, immer wieder selbst beobachten können und Beziehungen zur affinen Geometrie und zur projektiven Geometrie herstellen können.[111]

Erst die Motivation, die einerseits die Neugierde des Schülers weckt, und ihn andererseits vom außermathematischen Wert des Lehrstoffes unmittelbar überzeugt, versetzt den Schüler in eine geistige Gestimmtheit, sich mit dem vom Lehrer Dargebotenen näher auseinanderzusetzen.

Dazu eignen sich außermathematische Bereiche, die der Schüler zumindest teilweise aus eigener Erfahrung kennt und in denen er vielleicht sogar selbst Erfah-

[111] BERTÉ, 1993, S. 121-127

rungen gesammelt hat. Es bieten sich einerseits zahlreiche, vielfältige Anwendungen aus dem technisch-naturwissenschaftlichen Bereich an, andererseits aber auch Anwendungen, die von den Beziehungen zu den Humanwissenschaften – somit von der Wirkung der Mathematik auf unsere Kulturwelt – handeln. (Mathematik entstand ja aus dem Bestreben der Menschheit heraus, sich die Umwelt erfassbarer zu gestalten; dies geschah und geschieht heute noch durch Einteilung der Umwelt nach Größe, Gestalt und Zahl.)

Es gibt natürlich nicht nur außermathematische Motivation. Mathematik an sich kann auch faszinierend und motivierend wirken; dies ist ja genau die Triebfeder mathematischer Forschung. Weiters werden mathematische Kuriositäten oft als reizvoll und unterhaltsam empfunden. Es gibt auch Schüler, die „ innere Ziele" verfolgen: Sie möchten Aufgaben verstehen, herausfordernde Aufgaben lösen, andere durch ihre Leistungen übertreffen und beeindrucken.

Konkret zu diesem Kapitel

Im Schulunterricht wird man dieses Kapitel nicht derart isoliert betrachten, wie es hier aus systematischen Gründen geschah, sondern laufend an geeigneten Stellen Anwendungsbeispiele einfließen lassen.

Einen rein anwendungsorientierten Mathematikunterricht zu konzipieren und durchzuführen, dürfte eher schwierig sein, da viele Anwendungsgebiete i.A. oft schwierige und inhomogene mathematische Voraussetzungen erfordern. Außerdem kann dies auch nicht erwünscht sein, denn bei übermäßiger Betonung der Anwendungen würden weitere wichtige Facetten der Mathematik vernachlässigt werden. Wo blieb etwa der ästhetische und spielerische Aspekt der Mathematik? Stattdessen würde die Mathematik nur zur „Hilfswissenschaft" degradiert werden und erschiene nicht als eigenständiges Kulturgut.

In vernünftiger Menge angewandt, können interessante Anwendungsbeispiele aber motivierend und anregend wirken. Insbesondere in der Übungsphase, wenn es nicht mehr primär um das Sichern von wichtigen Einzelkenntnissen, sondern mehr um das Zusammenfassen und Ordnen eines sinnmäßig zusammengehörenden Ganzen geht, kann durch Anwendungsbeispiele der Unterricht aufgelockert und abwechslungsreicher gestaltet werden.

Man kann aber auch gleich mit einem konkreten außermathematischen Beispiel in das Kapitel der Kegelschnitte einsteigen. Um die Ellipse einzuführen, könnte man etwa eine aufgeschnittene Wurst hernehmen, ein mathematisches Modell dafür bilden, mit Hilfe der Dandelinschen Kugeln die Brennpunkte definieren und schließlich die Gleichung für Ellipsen in erster Hauptlage herleiten. Ein einfacherer Einstieg wäre die Konstruktion der Ellipse als affines Kreisbild des Wurstquerschnitts.

Auch kann ausgehend von einem interessanten Anwendungsbeispiel ein fächerübergreifendes Unterrichtsprojekt aufgezogen werden; so stand z.B. die Herstellung eines Parabolspiegels im Mittelpunkt eines Projektes an einer Realschule in Deutschland[112], bei dem sich die Schüler sowohl theoretisch als auch experimentell mit dem Brennpunkt eines Paraboloids und anderen Parabeleigenschaften beschäftigten und schließlich einen Parabolspiegel bauten, mit dem in der Februarsonne ein Feuer entzündet wurde.

Sollte man sich als Mathematiklehrer nicht genügend kompetent für die Behandlung solcher außermathematischen Phänomene und Probleme fühlen, z.B. für die ausführliche Besprechung der Verwendung von Parabolspiegeln in Teleskopen, dann empfiehlt es sich, die Beratung und Unterstützung eines kundigen Kollegen einzuholen. In solch einem Projekt können nicht nur mathematische, sondern auch physikalische, geographische, historische und technisch-handwerkliche Aspekte zum Tragen kommen. Ganz zu Schweigen von sozialen Kompetenzen und Fähigkeiten, wie sozialem Umgang mit anderen (z.B. schulfremden Personen), Selbständigkeit und Organisieren von Arbeitsunterlagen, Büchern und Bastelmaterial, die der Schüler erwerben und erproben kann.

Man weiß, dass Schüler Projektunterricht aus vielerlei Gründen schätzen: Abwechslung im Schulalltag, Selbsttätigkeit, sichtbare Ergebnisse, die präsentiert werden können, … Andererseits ist der Projektunterricht für die Lehrperson aber mit erheblichem Aufwand verbunden, soll der Effekt eben nicht nur Abwechs-

[112] CLAUS, 1995, S. 211f

lung und Zeitvertreib sein, sondern auch ein Lernerfolg aus der Schülertätigkeit erwachsen.

Durch das Bearbeiten von Anwendungsbeispielen können einige fundamentale Ziele des Mathematikunterrichts erfüllt werden:

Anwendungsbeispiele sind, wie der Name schon sagt, anwendungsorientiert, d.h., sie helfen, Situationen das Alltags besser zu verstehen („Flüstergewölbe" im U-Bahntunnel) oder überhaupt erst bewusst wahrzunehmen. Wie oft hat man nicht schon achtlos eine schräg angeschnittene Wurst verspeist, ohne die elliptische Schnittfläche zu würdigen?

Um den Mathematikunterricht anwendungsorientiert zu gestalten, müssen die Beispiele nicht unbedingt immer vom Lehrer vorgegeben sein. Er kann auch während der Übungsphase die Schüler auffordern, in ihrer Umgebung selbst nach dem Auftreten von Kegelschnitten zu suchen, Probleme zu formulieren und anschließend versuchen nachzuweisen, dass es sich in der Tat um Kegelschnitte handelt. So kann der Unterricht offener gestaltet, und die Schüler zu mehr Selbständigkeit und Eigentätigkeit erzogen werden.

Konkret zu den einzelnen Beispielen

Aufgeschnittene Wurst

Die Konstruktion der Ellipse als waagrecht-affines Kreisbild ist so einfach, dass sie bereits in der 4. Klasse behandelt werden kann. Allerdings sollte man sich als Lehrer dessen bewusst sein, dass zu diesem Zeitpunkt der Zusammenhang mit der Brennpunktsdefinition noch nicht gezeigt werden kann, da der Beweis mit den Dandelinschen Kugeln für Schüler dieses Alters sicher noch zu schwierig ist. Es erscheint mir aber sinnvoll zu erwähnen, dass ein Kreis bei schräger Ansicht als Ellipse erscheint: Man kann die Schüler beobachten lassen, dass in einem halbvollen Glas Wasser die Wasserfläche, die ursprünglich Kreisform hatte, durch Neigen des Glases elliptische Gestalt annimmt.

An diese Herleitung anschließend lässt sich sehr einfach der Flächeninhalt einer Ellipse herleiten; die Ellipsenfläche verhält sich zur Kreisfläche im Verhältnis wie $\frac{a}{b}:1$. Für den Flächeninhalt einer Ellipse ergibt sich somit $A_{ell} = b^2\pi \cdot \frac{a}{b} = ab\pi$. (Der Flächeninhalt einer Ellipse kann natürlich ebenso mit Hilfe der Integralrechnung gefunden werden.)

Planeten- und Satellitenbahnen

Dieses Kapitel, mit dem die Schüler wahrscheinlich bereits im Rahmen ihres Physikunterrichts konfrontiert worden sind, scheint prädestiniert, als Lehrervortrag gestaltet zu werden. Die Präsentation kann aber auch einem astronomiebegeisterten Schüler als Kurzreferat übertragen werden.

Es geht hierbei hauptsächlich um die Vermittlung von Hintergrundwissen und Fakten, nämlich dass sich Planeten und Satelliten auf Kegelschnittbahnen bewegen, nicht jedoch um mathematisches Können.

Flüstergewölbe und Parabolspiegel

Die Interpretation des außermathematischen Sachverhalts ist nötig, um eine Skizze oder Zeichnung anfertigen zu können (*Interpretation, Übersetzen eines Sachverhalts aus der Praxis in die Sprache der Mathematik*). Dazu ist eine Vereinfachung, nämlich die Reduktion des rotationsellipsoid-förmigen Gewölbes auf die zweidimensionale Darstellung der Ellipse, vorzunehmen.

Besondere Bedeutung kommt dabei den Skizzen zu, da sie für die Beweisführung von grundlegender Bedeutung sind; es wird das Anfertigen und Lesen von Skizzen geschult.

Der Satz kann nicht nur elementargeometrisch, sondern natürlich auch analytisch bewiesen werden, was mir zwar einfacher erscheint, dafür aber weniger das produktive geistige Arbeiten anregt.

Eine analytische Beweisführung kann durch einfaches Nachrechnen erfolgen. Beim geometrischen Beweis, bei dem sicher einige inhaltliche Hilfen von Lehrerseite notwendig sind (Lehrer-Schüler-Gespräch), wird hingegen die Argumentationsfähigkeit der Schüler trainiert; sie muss sich auf elementare Sätze, wie Strahlensatz, Kongruenzsätze, Höhensatz, … stützen, wodurch Lernziele wie *Beweisen, Argumentieren* und *Stabilisierung* verfolgt werden.

Wurfparabel

Das Übersetzen vom enaktiven Darstellungsmodus des Ball-in-die-Luft-Werfens in die ikonische Darstellungsform der Zeichnung kann dadurch erleichtert werden, dass man den realen Vorgang des Ballwurfs beschreiben lässt.

Nachdem der Schüler durch das Vormachen und die Zeichnung eine Vorstellung von der Wurfbahn gewonnen hat, können die Ideen in symbolischer Form umgesetzt werden; da dies sicher einige Hilfen erfordern wird, könnte diese Sequenz am günstigsten in Form eines Lehrer-Schüler-Gesprächs ablaufen.

Erdbebenwellen

Hier liegt die Hauptaufgabe der Schüler darin, den außermathematischen Sachverhalt in die Sprache der Mathematik zu übersetzen und darin die Gleichung einer Hyperbel zu erkennen.

Außerdem kann fächerübergreifend mit dem Gegenstand Physik das Thema der Interferenz, das auch bei Schall-, Licht- und Funkwellen auftritt und vielen Messvorgängen als Grundlage dient, behandelt werden.

Schlussbemerkung

Es ist wahrscheinlich empfehlenswert, Anwendungsbeispiele nicht immer dort in den Unterricht einzubauen, wo sie vom Ergebnis her gerade zum Lehrstoff passen, sondern irgendwo einzuschieben, sodass der Schüler nicht von vornherein weiß, um welchen Kegelschnitttyp es sich handelt. So käme dem *Interpretieren* und *Argumentieren* wieder eine große Bedeutung zu, da der Schüler seine Vermutungen erst verifizieren und beweisen muss.

3. Verwendete Literatur

BANCHOFF, T.: *Dimensionen - Figuren und Körper in geometrischen Räumen*. Band 31, Heidelberg: Bibliothek von Spektrum der Wissenschaft, 1990, S. 58 ff.

BARAVALLE, H.: *Geometrie als Sprache der Formen*. Stuttgart: Verlag Freies Geistesleben Stuttgart, 1980

BERNHARD, H. u.a.: *Wissensspeicher Astronomie: Das Wichtigste in Stichworten und Übersichten*. Thun: Verlag Harri Deutsch, 1987

BERTÉ, A.: *Mathématique dynamique*. Collection „Perspectives didactiques“. Paris: Nathan, 1993

BÖHM R.: *Kegelschnitte: Ein Unterrichtskonzept zur Realisierung allgemeiner Lernziele und didaktischer Prinzipien*. Dipl. TU Wien, 1994

BÜRGER, H., FISCHER, F., MALLE, G.: *Lehrbuch für die 3. Klasse Mathematik AHS Oberstufe*. Wien, Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, 1991

CASTELNUOVO, E.: *Didaktik der Mathematik*. Frankfurt: Akademische Verlagsgesellschaft, 1968

CLAUS, J. C.: *Einführung in die Didaktik der Mathematik*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1995

DÖRFLER, W.: *Didaktische Prinzipien*. In: Didaktikhefte; Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik an Höheren Schulen herausgegeben von der Österr. Mathematischen Gesellschaft. Wien: Aug. 1979, Heft 4, S. 24-37

FH-JOHANNEUM LÜNEBURG: *Die Natur als Erfindung des Menschen: Algebraische Kurven*. http://rzserv2.fh-lueneburg.de/u1/gym03/expo/jonatur/wissen/mathe/kurve/kegelsch.htm, 4.10.1999

FLADT, K.: *Elementargeometrie*. Band 1, 3. Teil: *Der Stoff der Obersekunda und Prima (Darstellende Geometrie, Trigonometrie und Analytische Geometrie)*. Leipzig, Berlin: Teubner, 1931

FLADT K.: *Geschichte und Theorie der Kegelschnitte und der Flächen zweiten Grades*. Stuttgart: Ernst Klett Verlag, 1965

FREGIEN W.: *Ein Orakelspruch und die Folgen*. In: mathematik lehren. Dezember 1989, Heft 37, S. 6-10

FUCHS, K.: *Computer im Mathematikunterricht – Erfahrungen und Gedanken*. In: Didaktikhefte; Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik an Höheren Schulen herausgegeben von der Österr. Mathematischen Gesellschaft. Wien: März 1997, Heft 26, S. 21-35

GARDNER, M.: *Die Parabel: Faszination für Ästheten und Praktiker*. In: Spektrum der Wissenschaft. Oktober 1981, S. 11-17

GELLERT, W.: *Mathematik Ratgeber für Lehrer, Schüler, Eltern und zum Selbststudium*. Frankfurt: Verlag Harri Deutsch, 1988

HAACK, W.: *Darstellende Geometrie II: Körper mit krummen Begrenzungsflächen*. Berlin: Walter de Gruyter, 1971

HARENBERG, B. (Hrsg.): *Harenberg Kompaktlexikon in 5 Bänden*. Dortmund: Harenberg Lexikon Verlag, 1994

JOC/EFR: *Famous curves index*. http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/%7Ehistory/curves/cassinian.html, 4.10.1999

KAISER, H., NÖBAUER, W.: *Geschichte der Mathematik für den Schulunterricht*. Wien: Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, 1998

KRONFELLNER, M.: *Historische Aspekte im Mathematikunterricht*. In: Didaktikhefte; Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik an Höheren Schulen herausgegeben von der Österr. Mathematischen Gesellschaft. Wien: Nov. 1997, Heft 27, S. 83-100

KÜHLEIN, T.: *Analytische Geometrie der Ebene II: Kegelschnitte*. München: Mentor-Verlag, 1979

LEHRPLAN-SERVICE *Mathematik AHS, Kommentarheft 2*. Wien: Österreichischer Bundesverlag, 1988

LEHRPLAN-SERVICE *Mathematik AHS-Oberstufe, Kommentar*. Wien: Österreichischer Bundesverlag, 1991

LIETZMANN, W., JAROSCH J.: *Analytische Geometrie für die VII. und VIII. Klasse der Gymnasien, Realgymnasien und Frauenoberschulen*. Mathematisches Unterrichtswerk für Mittelschulen. Wien: Franz Deuticke, 1932

MAURER, M.: *Die Bedeutung der Kegelschnitte in unserem mathematisch-physikalischen Weltbild*. Dipl. TU Wien, 1993

MEYER, D.: *Der Parabolspiegel*. In: mathematik lehren. Dezember 1989, Heft 37, S. 28 und 33

Meyers Enzyklopädisches Lexikon in 25 Bänden. 9. Aufl., Mannheim: Bibliographisches Institut, 1971-1981

MEYER, J.: *Kegelschnitte: Ein entdeckender Zugang.* In: Der mathematikunterricht. 1995, Heft 1, S. 34-42

MÜLLER, R.: *Konika: Ihre Eigenschaften und Zusammenhänge.* Dipl. Universität Wien, 1989

NOVAK, J. u.a.: *Mathematik Oberstufe 3*. Reniets Verlag, 1991

POLACK, J-D.: *Chuchotements dans le métro.* In: Sciences et avenir, April-Mai 1995, Nr. 100, S. 32-35

REICHEL H.-C.: *Wie Ellipse, Hyperbel und Parabel zu ihrem Namen kamen und einige allgemeine Bemerkungen zum Thema „Kegelschnitte“ im Unterricht.* In: Didaktik der Mathematik. 1991, 19. Jahrgang, Heft 2, S. 111-130

REICHEL, H.-C., MÜLLER, R., HANISCH, G., LAUB, J.,: *Lehrbuch der Mathematik 7*. Wien, Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, 1995

SCHEID, H.: *Elemente der Geometrie.* Mathematische Texte, Bd. 3: Mannheim, Wien, Zürich: BI-Wissenschaftsverlag, 1991

SCHREINER, J.: *Physik 1 für die Oberstufe der AHS*. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, 1991a, S. 31-34

SCHREINER, J.: *Physik 2 für die Oberstufe der AHS*. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, 1992, S. 1-25

SCHREINER, J.: *Physik 3 für die Oberstufe der AHS*. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, 1991b, S. 34

SCHUPP H., DABROCK H.: *Höhere Kurven: Situative, mathematische, historische und didaktische Aspekte.* Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich: BI-Wissenschaftsverlag, 1995

SCHUPP H.: *Kegelschnitte.* Mannheim, Wien, Zürich:, BI-Wissenschaftsverlag, 1988

SCHWARTZE, H., SCHÜTZE, I., ROHDE, C.: *Konstruktive Raumgeometrie mit Computerhilfe.* Heidelberg: Spektrum Akad. Verlag, 1996, S. 201-221

SZIRUCSEK, DINAUER, UNFRIED, SCHATZL: *Mathematik 7 AHS.* Wien: Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, 1991

WITTMANN, E.: *Grundkurs des Mathematikunterrichts.* Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg, 1981

ZECH, F.: *Grundkurs Mathematikdidaktik: Theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen im Fach Mathematik.* Weinheim, Basel: Beltz, 1978

4. Abbildungsverzeichnis