6. Tilgungsrechnung

6.1. Einführung

Gegenstand der Tilgungsrechnung ist die Festlegung der Rückzahlungen für einmalig ausgezahlte Kredite einschließlich der Kreditzinsen und -gebühren entweder

a) am Fälligkeitstag in einer Summe (sog. gesamtfällige Schuld) oder

b) in Teilbeträgen zeitlich gestaffelt.

Allgemein handelt es sich um ein Problem der Investitionsrechnung, bei dem der Nettobarwert aller Rückzahlungen gleich dem gewährten Kredit sein muß, d.h. der Kapitalwert ist gleich Null.

Bei regelmäßiger Tilgung einer Schuld S gemäß b) in Jahresabständen $t = 1, 2, \ldots n$ und mit gleichbleibender Leistung wird für den Teilbetrag der Begriff *Annuität* verwendet:

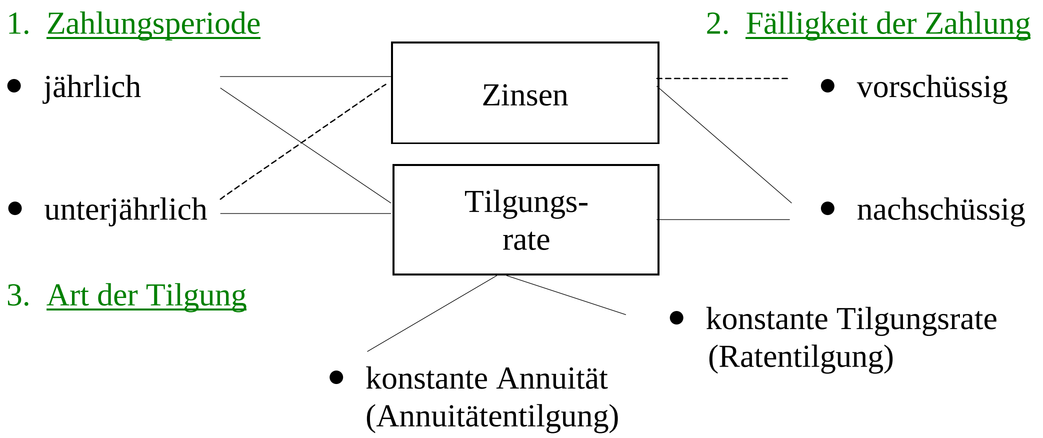
Annuität im Jahr t

$$\boxed{A_t = T_t + Z_t} \tag{6.1}$$

T_t Tilgungsrate im Jahr t
Z_t Kreditzinsen im Jahr t

Weitere Symbole:		
	S	Kredit bei $t = 0$ („ursprüngliche Schuld“)
	RS_t	Restschuld am Ende des Jahres t
	a	unterjährliche Annuität
	i	Zinssatz p.a.
	n	Kreditlaufzeit in a
	m	Zahl der Tilgungsperioden pro Jahr

Klassifikation:



Bei regelmäßiger Tilgung in mehreren Rückzahlungsbeträgen sind in der Praxis zwei grundsätzliche Tilgungsarten vorherrschend:

1. gleichbleibende Tilgungsraten T_t = konst. $\Rightarrow$ **Ratentilgung**:
   da der Zins nur auf die jeweilige Restschuld zu zahlen ist, nimmt die Annuität mit t ab.
2. gleichbleibende Annuitäten A_t = konst. $\Rightarrow$ **Annuitätentilgung**:
   wegen abnehmender Zinsen nehmen die Tilgungsraten gemäß Gl.(6.1) mit t zu.

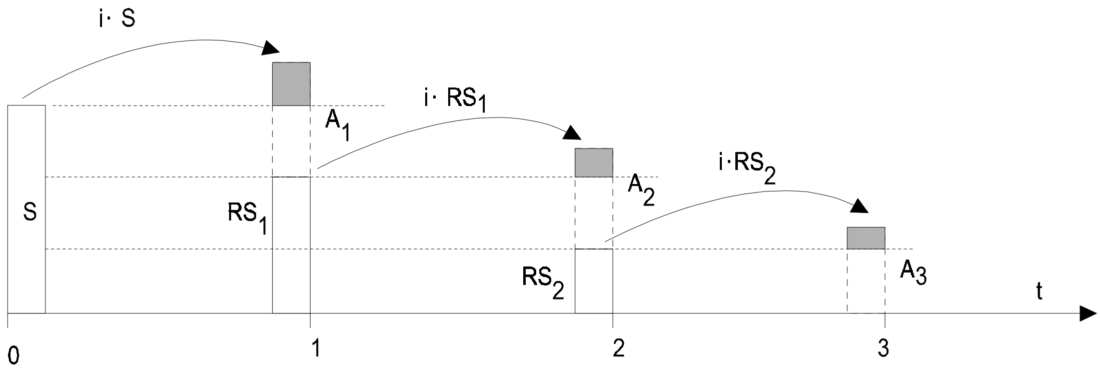
Unterschiede ergeben sich insbesondere auch durch unterschiedlich praktizierte Verrechnung der Zinsen und Kreditgebühren.

Für die Annuitäten wird durchweg **nachschüssige** Zahlung vorausgesetzt, weil davon auszugehen ist, daß die erste Ratenzahlung nicht zugleich mit der Kreditvergabe erfolgt, sondern am Ende der ersten Laufzeitperiode.

6.2. Tilgung durch gleichbleibende Tilgungsraten (Ratentilgung)

6.2.1. Jährliche Ratentilgung

Schematische Darstellung: (n = 3 Jahre)



Tilgungsrate $$\boxed{T_t = \frac{S}{n} = \quad T = \text{konst.}} \qquad (6.2)$$

Restschuld am Ende des Jahres t:

$$RS_t = S - t \cdot T = n \cdot T - t \cdot T = T \cdot (n-t)$$

$$\boxed{RS_t = \frac{S}{n} \cdot (n-t)} \qquad (6.3)$$

Zinsbelastung für das Jahr t:

$$Z_t = i \cdot RS_{t-1}$$

$$\boxed{Z_t = i \cdot \frac{S}{n} \cdot (n-t+1)} \qquad (6.4)$$

Annuität für das Jahr t:

$$A_t = T + Z_t = \frac{S}{n} + i \cdot \frac{S}{n} \cdot (n-t+1)$$

$$\boxed{A_t = \frac{S}{n} \cdot [1 + i \cdot (n-t+1)]} \qquad (6.5)$$

Die Anwendung der Gln. (6.3) bis (6.5) erübrigt sich, wenn – wie allgemein üblich – die interessierenden Größen in eine Tabelle, den sog. *Tilgungsplan*, aufgenommen und mittels Tabellenkalkulation rekursiv berechnet werden. Für eine Jahreszeile t ergibt sich dann die Berechnungsreihenfolge:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
t	RS_{t-1}	$T_t = \frac{S}{n}$	$Z_t = i \cdot RS_{t-1}$	$A_t = T_t + Z_t$	$RS_t = RS_{t-1} - T_t$

Alle Größen beziehen sich auf des Ende des Laufzeitjahres t bzw. des Vorjahres t –1, wobei $RS_0 = S$ gilt und $RS_n = 0$ sein muß.

6.2.2. Unterjährliche Ratentilgung

Die Gesamtschuld wird auf unterjährliche Raten aufgeteilt; bei m Tilgungsraten pro Jahr gilt:

Tilgungsrate $$\boxed{T_u = \frac{S}{m \cdot n} = \text{konst.}} \qquad (6.6)$$

Die Zinsen werden unterjährig berechnet, doch wegen ihrer Fälligkeit am Ende des jeweiligen Laufzeitjahres müssen sie zwischenzeitlich auf einem gesonderten Konto kumuliert werden. Für die Berechnung der unterjährigen Zinsen ist maßgebend, ob lineare oder exponentielle Verzinsung zu berücksichtigen ist.

1. Bei exponentieller Verzinsung für die unterjährigen Laufzeitabschnitte (u = 1, 2, ... m) ist der zu i konforme unterjährige Zinssatz k gemäß Gl.(2.12) zugrunde zu legen:

$$\boxed{Z_u = k \cdot RS_{u-1} = \left((1+i)^{1/m} - 1\right) \cdot RS_{u-1}}\,. \tag{6.7}$$

2. Bei linearer Verzinsung für die unterjährigen Laufzeitabschnitte ist der relative unterjährige Zinssatz i^* gemäß Gl.(1.13a) anzuwenden, und es gilt:

$$\boxed{Z_u = i^* \cdot RS_{u-1} = \frac{i}{m} \cdot RS_{u-1}} \tag{6.8}$$

Für den Tilgungsplan ergibt sich damit das folgende Berechnungsschema:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
u	RS_{u-1}	T_u	$Z_u = k \cdot RS_{u-1}$ bzw. $Z_u = i^* \cdot RS_{u-1}$	$A_u = \begin{cases} T_u & u \neq m \\ T_u + \sum_{u=1}^{m} Z_u & u = m \end{cases}$	$RS_u = RS_{u-1} - T_u$

Trotz Fälligkeit der Kreditzinsen am Jahresende ist es bei unterjährlicher Tilgung üblich, die unterjährigen Zinsen auch unterjährig in die Annuitäten einzubeziehen. Spalte (5) des Berechnungsschemas wird dann zu $A_u = T_u + Z_u$ vereinheitlicht.

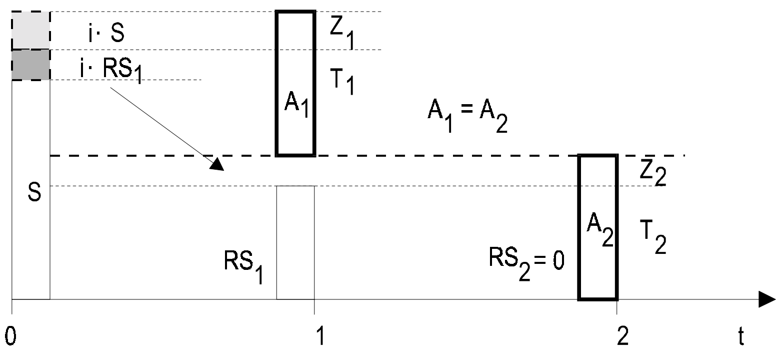
Dem Vorteil einer gleichmäßigeren Aufteilung der Zinslast auf alle Tilgungsperioden steht für den Schuldner der Nachteil gegenüber, daß die Zinsen gewissermaßen vorschüssig verrechnet werden, also schon früher gezahlt werden müssen. Deshalb schreibt der Gesetzgeber vor, den *effektiven Jahreszins* anzugeben, für den alle tatsächlich geleisteten Annuitäten (zuzüglich anderer Kreditkosten, wie z. B. Gebühren für Vertragsabschluß und Kontoführung) denselben Nettobarwert verkörpern, wie bei Zugrundelegung der exakten Berechnungsweise gemäß dem obigen Schema.

„Exakt" war in Deutschland bisher, die Zinsen gemäß Gl.(6.8) unterjährig linear nach der sog. 30/360-Tage-Methode (d.h. jeder Monat hat 30 Zinstage, das Jahr hat demgemäß 360 Zinstage) zu berechnen und am Ende jedes Laufzeitjahres (sowie einen eventuellen Rest am Ende der Laufzeit) zu zahlen. Zukünftig gilt für exakte Vergleichsrechnungen zur Ermittlung des effektiven Jahreszins laut EU-Vereinbarungen die unterjährig exponentielle, taggenaue Bestimmung und jährliche Zahlbarkeit der Zinsen. Die taggenaue Berechnung gemäß Gl.(6.7) schließt ein, die Kalendertage jedes einzelnen Monats und für das Jahr 365 bzw. 366 Tage zu berücksichtigen.

6.3. Tilgung durch gleichbleibende Annuitäten (Annuitätentilgung)

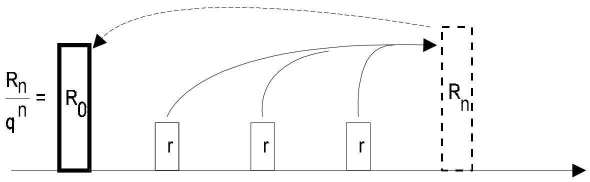
6.3.1. Jährliche Annuitätentilgung

Schematische Darstellung: (n = 2 Jahre)



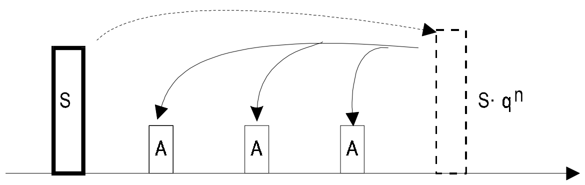
Bei gleichbleibender Annuität in allen Tilgungszeitpunkten ist der Zinsanteil am Anfang der Laufzeit wegen der hohen Restschuld relativ hoch, demzufolge sind die Tilgungsraten anfangs niedriger. Diese Relationen kehren sich zum Ende der Laufzeit hin um.

Das folgende Bild verdeutlicht die *Analogie zur Rentenrechnung*:



Rentenrechnung:

Bildung von Kapital R_n
(Kapitalisierung)



Annuitätentilgung:

Tilgung von Schulden S
(Kapitalwiedergewinnung)

Gesucht ist der konstante, in gleichen Zeitabständen mehrfach zu zahlende Betrag A, der gerade auf dieselbe Summe anwächst, wie der Endwert der Schuld S:

$$S \cdot q^n = A \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad \text{vgl. Rentenendwert Gl.(5.1),}$$

d. h. Anwendung der Rentenrechnung mit Rentenbarwert $R_0 = S$ und Rentenrate $r = A$.
Als *Annuität A* ergibt sich analog zu Gl. (5.4) für jährlich nachschüssige Rentenzahlung:

$$\boxed{A = S \cdot q^n \frac{q-1}{q^n - 1} = S \cdot w_n} \qquad w_n = q^n \frac{q-1}{q^n-1} \quad \text{Annuitätenfaktor} \qquad (6.9)$$

(Verrentungsfaktor, Kapitalwiedergewinnungsfaktor)

Die *Restschuld RS* nach Ablauf von t Jahren ergibt sich aus der aufgezinsten Schuldsumme, verringert um die bis dahin gezahlten Annuitäten gemäß Gl.(5.1):

$$RS_t = S \cdot q^t - A \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1} \quad \text{bzw. mit } A \text{ nach Gl.(6.9)}$$

$$= S \cdot q^t - S \cdot q^n \cdot \frac{q-1}{q^n-1} \cdot \frac{q^t - 1}{q-1} = S \cdot \left(q^t - \frac{q^n \cdot \left(q^t - 1\right)}{q^n - 1} \right)$$

und weiter umgeformt:

$$\boxed{RS_t = S \cdot \frac{q^n - q^t}{q^n - 1}} \qquad (6.10)$$

<u>Andere Herleitung:</u>

Die Restschuld ist gleich der Summe der abgezinsten Annuitäten, die während der Restlaufzeit $n - t$ noch zu zahlen sind, also gleich dem Rentenbarwert dieser Annuitäten im Jahr t. Gemäß Gl.(5.2) gilt

$$RS_t = A \cdot \frac{1}{q^{n-t}} \cdot \frac{q^{n-t} - 1}{q - 1} = A \cdot \frac{1}{q^n} \cdot \frac{q^n - q^t}{q - 1}. \qquad (6.10a)$$

Speziell folgt daraus für $t = 0$: $RS_0 = A \cdot \frac{1}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = S$

$t = n$: $RS_n = 0$

Die *Zinsen* Z in der Peride t ergeben sich aus der Restschuld des Vorjahres $Z_t = i \cdot RS_{t-1}$ mit Gl.(6.10):

$$\boxed{Z_t = S \cdot i \cdot \frac{q^n - q^{t-1}}{q^n - 1}} \tag{6.11}$$

Als *Tilgungsrate* T für das Jahres t ergibt sich aus $T_t = A - Z_t$ mit Gln. (6.9) und (6.11):

$$T_t = S \cdot q^n \frac{q-1}{q^n - 1} - S \cdot i \cdot \frac{q^n - q^{t-1}}{q^n - 1} = \frac{S}{q^n - 1} \cdot \left[\underbrace{q^n (q-1) - i \cdot q^n}_{=0} + i \cdot q^{t-1} \right],$$

$$\boxed{T_t = S \cdot i \cdot \frac{q^{t-1}}{q^n - 1}} \quad . \tag{6.12}$$

Die Anwendung der Gln. (6.10) bis (6.12) kann wiederum ersetzt werden durch rekursive Berechnung dieser Größen in einem Tilgungsplan. Für eine Jahreszeile t ergibt sich dann die Berechnungsreihenfolge:

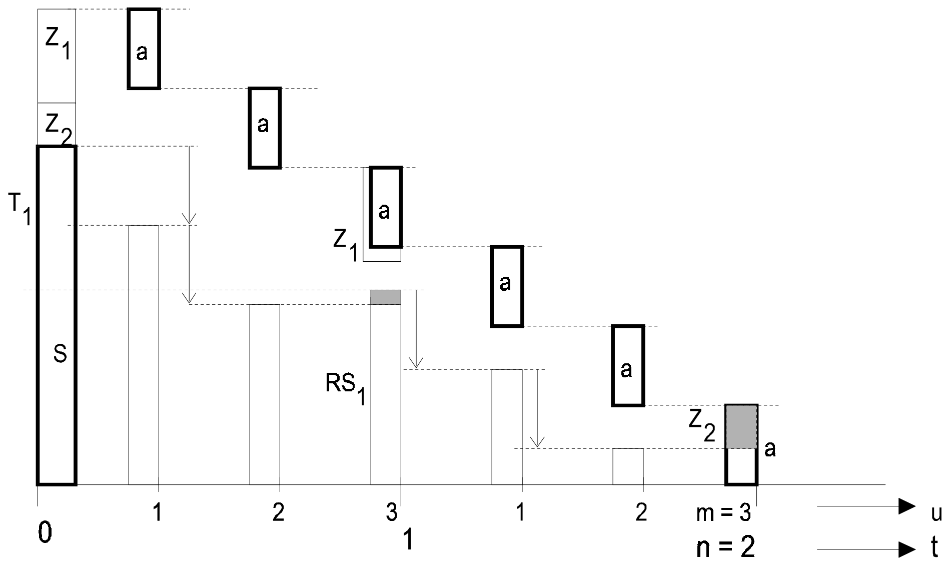
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
t	RS_{t-1}	$A_t = A$	$Z_t = i \cdot RS_{t-1}$	$T_t = A_t - Z_t$	$RS_t = RS_{t-1} - T_t$

Alle Größen beziehen sich auf des Ende des Laufzeitjahres t bzw. des Vorjahres t –1, wobei $RS_0 = S$ gilt und $RS_n = 0$ sein muß.

6.3.2. Unterjährliche Annuitätentilgung

Es besteht Analogie zur unterjährlich nachschüssigen Rentenzahlung (vgl. Abschn. 5.3.).

Schematische Darstellung: $m = 3$, $n = 2$



Die Jahresannuität *A*, in der gemäß Gl.(6.9) jährliche Zinseszinsen berücksichtigt sind, muß derart in *m* gleiche Annuitäten *a* aufgegliedert werden, daß innerhalb der Jahresperioden gilt:

$$A = \Sigma \text{ unterjährliche Tilgungsraten } + \Sigma \text{ einfache Zinsen am Jahresende.}$$

Die im Laufe des Jahres gezahlten unterjährlichen Annuitäten *a* sind (mit Ausnahme der letzten) reine Tilgungsraten ohne Zinsbestandteile; die Zinsen auf die zwischenzeitlichen Restschuldbeträge werden erst am Ende des Jahres verrechnet.

Faßt man nun *A* analog zur jahreskonformen Ersatzrentenrate, mit der die unterjährlichen Rentenperioden an die jährliche Zinsperiode angepaßt werden, als eine Größe auf, die sich aus konstanten unterjährlichen Annuitäten *a* ergibt, dann gelten die in Abschn. 5.3.1. abgeleiteten Formeln für unterjährlich nachschüssige Rentenzahlungen entsprechend:

1. Bei *exponentieller Verzinsung* für die unterjährigen Laufzeitabschnitte gilt übereinstimmend mit Gl.(5.9):

$$a = A \cdot \frac{q^{1/m} - 1}{q - 1} \quad \text{und mit Gl.(6.9)} \qquad \boxed{a = S \cdot \frac{q^n}{q^n - 1} \cdot \left(q^{1/m} - 1 \right)}\ . \tag{6.13}$$

   Der Klammerausdruck ist gemäß Gl.(2.12) der konforme unterjährige Zinssatz k .

2. Bei *linearer Verzinsung* für die unterjährigen Laufzeitabschnitte gilt übereinstimmend mit Gl.(5.10)

$$a = \frac{A}{m + i \cdot \frac{m-1}{2}} \quad \text{und mit Gl.(6.9)} \qquad \boxed{a = S \cdot \frac{q^n}{q^n - 1} \cdot \frac{i}{m + i \cdot \frac{m-1}{2}}} \tag{6.14}$$

Für den Tilgungsplan ergibt sich damit das folgende Berechnungsschema:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
u	RS_{u-1}	$A_u = a$	$Z_u = k \cdot RS_{u-1}$ bzw. $Z_u = i^* \cdot RS_{u-1}$	$T_u = \begin{cases} a & u \neq m \\ a - \sum_{u=1}^{m} Z_u & u = m \end{cases}$	$RS_u = RS_{u-1} - T_u$

Das Berechnungsschema für den Tilgungsplan vereinfacht sich, wenn die Zinsanteile Z_u *unterjährlich nachschüssig* verrechnet werden, wenn also die unterjährliche Annuitätentilgung nach demselben Rechenschema erfolgen kann wie die jährliche, wobei anstelle von *n* Laufzeitjahren lediglich $m \cdot n$ unterjährliche Laufzeitperioden zu berücksichtigen sind. Gl.(6.9) ist entsprechend anwendbar, indem außerdem der jährliche Aufzinsungsfaktor $q = 1 + i$ durch einen unterjährlichen ersetzt wird.

In der jetzigen Bankpraxis ist es üblich, von unterjährig linearer Verzinsung auszugehen und den relativen Zinssatz $i^* = i/m$ zu verwenden. Dann folgt aus Gl.(6.9)

$$a = S \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n} \cdot \frac{\frac{i}{m}}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}\ . \tag{6.15}$$

Wenn von unterjährig exponentieller Verzinsung ausgegangen wird, dann ist der konforme Zinssatz $k = (1+i)^{1/m} - 1$ zu verwenden. Eingesetzt in Gl.(6.9) folgt

$$a = S \cdot \left((1+i)^{1/m}\right)^{m \cdot n} \cdot \frac{(1+i)^{1/m} - 1}{\left((1+i)^{1/m}\right)^{m \cdot n} - 1} = S \cdot q^n \cdot \frac{q^{1/m} - 1}{q^n - 1}. \tag{6.16}$$

Bei dieser Vorgehensweise entsprechend der AIBD-Methode besteht für a kein Unterschied zur jährlichen Verzinsung gemäß Gl.(6.13), und der effektive Jahreszins ist gleich dem nominellen Zinssatz (s. auch Gl.(5.11)). Bei Berechnung der Annuität nach Gl.(6.15) erhöht sich dagegen der effektive Jahreszins im Vergleich zur jährlichen Verzinsung.

Das Berechnungsschema vereinfacht sich in Spalte (5) bei beiden Varianten gleichermaßen:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
u	RS_{u-1}	$A_u = a$	$Z_u = k \cdot RS_{u-1}$ bzw. $Z_u = i^* \cdot RS_{u-1}$	$T_u = a - Z_u$	$RS_u = RS_{u-1} - T_u$

6.3.3. Tilgung mit Prozentannuitäten

Aus Sicht der Buchung ist es von Vorteil, wenn die Annuitäten als Prozentsatz der ursprünglichen Schuldsumme S bzw. als (glatte) Prozentwerte vorgegeben werden:

Jahresannuität in % $\qquad w^{\%} = w \cdot 100$

Jahresannuität in DM $\qquad \boxed{A_t = w \cdot S = konst.}$ $\quad$ für $t = 1, 2, ..., n$ $\qquad$ (6.17)

Jahreszinsen $\qquad Z_t = i \cdot RS_{t-1}$ $\qquad$ (6.18)

Tilgungsrate $\qquad T_t = A_t - Z_t$

Die Restschuld am Ende des Jahres t ergibt sich analog zur Herleitung von Gl.(6.10):

$$RS_t = \underbrace{S \cdot q^t}_{\text{Anwachsen der Schuld bis } t \text{ ohne Tilgung}} \underbrace{- A \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1}}_{\text{Endwert aller gezahlten Annuitäten bis zum Jahr } t \text{ (nachschüssige Rente)}}$$

Mit A nach Gl.(6.17) ergibt sich:

$$\boxed{RS_t = S \cdot \left(q^t - w \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1} \right)}. \tag{6.19}$$

Die Laufzeit endet, wenn die Schuld vollends getilgt ist:

$$RS_n = S \cdot q^n - A \cdot \frac{q^{n-1}}{q-1} = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad S \cdot q^n = A \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Hinsichtlich des allgemeinen Berechnungsschemas für den Tilgungsplan bestehen keine Unterschiede zur jährlichen Annuitätentilgung nach Abschn. 6.3.1., wenn man von den unterschiedlichen Anfangsbedingungen bezüglich A absieht. Allerdings sind nachfolgende Besonderheiten zu beachten.

Für die Tilgungsplanung gibt es generell zwei Möglichkeiten,

1. die Laufzeit n wird vorgegeben; dann resultiert mit S und q daraus die Annuität A:

   $$A = S \cdot q^n \frac{q-1}{q^n - 1} = S \cdot w_n \qquad \text{(vgl. Abschn. 6.3.1., Gl.(6.9))},$$

2. der Wiedergewinnungsfaktor w ist als Prozentannuität vorgegeben; dann resultiert daraus die Laufzeit n durch Umformung von Gl.(6.9):

   $$w = q^n \frac{q-1}{q^n - 1}; \qquad q^n \cdot w - w = q^n \cdot i\,; \qquad q^n \cdot (w - i) = w \text{ und daraus}$$

   $$\boxed{n = \frac{\lg w - \lg(w-i)}{\lg q}}\,. \tag{6.20}$$

   Aus Gl.(6.20) ergibt sich in der Regel eine nichtganzzahlige Laufzeit $n = N + n_{rest}$, deren ganzzahliger Anteil N, eingesetzt in Gl.(6.19), die Höhe der *Abschlußzahlung* bestimmt, für die allgemein $0 \le RS_N \le A$ gilt:

   $$\boxed{RS_N = S \cdot \left(q^N - w \cdot \frac{q^N - 1}{q - 1} \right)}, \qquad N \text{ ganzzahlig.} \tag{6.21}$$

Um die Abschlußzahlung zu vermeiden, kann w nachträglich so korrigiert werden, daß n ganzzahlig wird. Mit Gl.(6.20) wird dann nicht n aus w, sondern w mit einem gerundeten Laufzeitwert $\tilde{n} = N$ oder $\tilde{n} = N + 1$ ermittelt und die Prozentannuität als korrigierter Wert $\tilde{w}$ bestimmt:

Prozentannuität
$w\% = \tilde{w}/100$

$$\boxed{w^{\%} = q^{\tilde{n}} \cdot \frac{q-1}{q^{\tilde{n}} - 1} \cdot 100}\,. \tag{6.22}$$

Auf Grund dieser Möglichkeit, die Belastung des Kreditnehmers durch wechselseitige Abstimmung zwischen der Tilgungshöhe w und der Tilgungsdauer n wunschgemäß zu bestimmen, sind die hier gezeigten Zusammenhänge von allgemeingültiger Bedeutung für die Tilgungsplanung.

Bei *m unterjährigen Laufzeitperioden* werden in gleicher Weise Prozentannuitäten $a = w \cdot S$ im voraus bestimmt. Bei tabellarischer Berechnung nach denselben Schemata wie in Abschn. 6.3.2. erscheinen Laufzeit bzw. Zahl der Tilgungsperioden sowie Höhe der Abschlußzahlung im Ergebnis der rekursiven Vorgehensweise als letzte Tabellenzeile. In jedem Fall erscheint eine Abschlußzahlung als Restschuld am Ende der letzten Laufzeitperiode. Wie damit praktisch weiter zu verfahren ist, bedarf einer gesonderten Festlegung. In der Regel wird dieser Restbetrag nochmals verzinst und am Ende der darauffolgenden Periode getilgt.

6.4. Spezielle Tilgungsprobleme

6.4.1. Berücksichtigung von Kreditgebühren und Disagio

Bisher wurden außer den regelmäßig fälligen Kreditzinsen keine weiteren Kosten berücksichtigt, so daß die Anfangsschuld $RS_0 = S$ mit dem ausgereichten Darlehen D generell übereinstimmte. Üblicherweise ist zur Abgeltung des Verwaltungsaufwands, der mit einer Kreditvergabe verbundenen ist, bei $t = 0$ eine einmalige Kreditgebühr fällig. Diese ist als Prozentsatz g des Darlehens vereinbart und kann wie folgt verrechnet werden:

a) Das vereinbarte Darlehen D wird in voller Höhe ausgezahlt, während die Gebühren in das Schuldkonto einfließen:

$$S' = D \cdot (1 + g) > D\,. \tag{6.23}$$

Die um die Gebühren erhöhte Anfangsschuld S' wirkt sich sukzessive erhöhend auf Tilgung und Zinsen aus.

b) Der auf der vereinbarten Anfangsschuld S beruhende Tilgungsplan bleibt unverändert, während das ausgezahlte Darlehen D' um die einbehaltenen Gebühren vermindert ist:

$$D' = S - g \cdot D < S\,. \tag{6.24}$$

Finanzmathematisch dasselbe ist ein prozentualer Abschlag $\delta \cdot D$ vom Darlehen, der formal eine Vorauszahlung von Zinsen darstellt (Abgeld, *Disagio*). Bei der Baufinanzierung spricht man von *Damnum*; es hat neben der Gebührendeckung vor allem die Aufgabe, durch eine anfängliche Einmalzahlung die laufende Zinsbelastung geringer zu halten.

In beiden Fällen ist die Leistung des Kreditinstituts in Form des ausgereichten Darlehens geringer als die vom Schuldner geforderte Gegenleistung in Form von Tilgungs- und Zinszahlungen. Im Ergebnis einer Investitions- bzw. Finanzierungsrechnung (s. Abschn. 4.2.) mit dem nominellen Kreditzinssatz i als Kalkulationszinssatz würde ein Kapitalwert verbleiben, der mit den Kreditgebühren $g \cdot D$ (bzw. mit dem Disagio $\delta \cdot D$) übereinstimmt. Die Kapitalwertannuität ist Ausdruck für die laufenden Kapitalkosten, die der Schuldner neben den Zinskosten zusätzlich trägt. Die Summe aus beiden Kostenbestandteilen bestimmt den effektiven Jahreszins j.

6.4.2. Berücksichtigung von tilgungsfreien Zeiten

Tilgungsfreie Perioden werden vereinbart, um den Schuldner zeitweise von der Tilgung zu entlasten. Folgende praktische Verfahrensweisen sind üblich:

a) *Zahlungsaufschub*: Die Zahlung der Annuitäten beginnt nicht sofort, sondern mit zeitlicher Verzögerung von k Jahren. In dieser Zeit erhöht sich die Darlehensschuld D um Zinseszinsen. Mit

$$S_k = D \cdot (1 + i)^k > D \tag{6.25}$$

ergibt sich die in den Laufzeitjahren $t = k+1, k+2, \ldots, n$ zu zahlende Annuität A' aus Gl. (6.9):

$$A' = D \cdot (1+i)^k \cdot w_{n-k} = D \cdot (1+i)^k \cdot \frac{i \cdot (1+i)^{n-k}}{(1+i)^{n-k} - 1} > D \quad \text{und daraus}$$

$$A' = D \cdot \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^{n-k} - 1} \quad . \tag{6.26}$$

Während der tilgungsfreien Zeit $t = 1, 2, \ldots, k$ werden auch keine Zinsen gezahlt.

b) *Tilgungsstreckung*: Die Zahlung der Annuitäten beginnt mit zeitlicher Verzögerung von k Jahren, aber im Unterschied zu a) sind jährlich die Zinsen fällig. Dadurch erhöht sich die Schuld $S = D$ bis zum Beginn der eigentlichen Tilgung nicht. Berechnungsgrundlage für die Annuität nach Gl. (6.9) sind aber ebenfalls $n - k$ Laufzeitjahre.

In beiden Fällen kommt es zwar zu Abweichungen von den regelmäßigen Zins- und Tilgungszahlungen, aber der effektive Jahreszins j ändert sich dadurch nur, wenn für unterjährige Perioden der relative Zinssatz i^* zugrunde gelegt wird.

6.4.3. Berücksichtigung von Agio

Häufig ist neben Tilgung und Zinsen ein Aufschlag (Aufgeld, *Agio*) als fester Prozentsatz α der Tilgung zu zahlen. Damit erhöht sich die Anfangsschuld analog zu Gl. (6.23)

$$S' = D \cdot (1+\alpha) > D \tag{6.27}$$

mit dem Unterschied, dass für den Aufschlag $\alpha \cdot D$ keine Zinsen erhoben werden und die Annuitäten deshalb modifiziert zu ermitteln sind.

– Bei Ratentilgung ergibt sich die jährliche Annuität aus T_t und Z_t analog zu Gl. (6.5):

$$A_t = (1+\alpha) \cdot T_t + Z_t \tag{6.28}$$

– Bei Annuitätentilgung ist zuerst A = konst und daraus mit Z_t die jährliche Tilgungsrate zu bestimmen. Für die Annuität A ist in Gl. (6.9) die um den Faktor $(1+\alpha)$ erhöhte Schuld S' zu berücksichtigen. Um eine Verzinsung der Schuld bzw. Tilgung ohne diesen Aufschlag zu gewährleisten, ist der Zinssatz i fiktiv mit dem reziproken Wert $1/(1+\alpha)$ zu multiplizieren:

$$A = (1+\alpha) \cdot D \cdot \hat{q}^n \, \frac{\hat{q} - 1}{\hat{q}^n - 1} \quad \text{mit} \quad \hat{q} = 1 + \frac{i}{1+\alpha} \, . \tag{6.29}$$

Daraus ergibt sich gemäß Gl. (6.28) die Tilgungsrate

$$T_t = \frac{A - Z_t}{1+\alpha} \quad . \tag{6.30}$$

Wie ein Disagio erhöht das Agio die laufenden Kapitalkosten und somit den effektiven Jahreszins.

Die im Abschn. 6.4 nur andeutungsweise und unvollständig dargestellten Besonderheiten sind lediglich als Hinweis aufzufassen, dass die praktischen Konditionen für Kreditverträge sehr vielfältig sein können, zumal diese und andere spezielle Probleme auch kombiniert auftreten. Deshalb spielt die Bestimmung des effektiven Jahreszinses als Vergleichsmaßstab für jeden Tilgungsplan eine elementare, unverzichtbare Rolle.