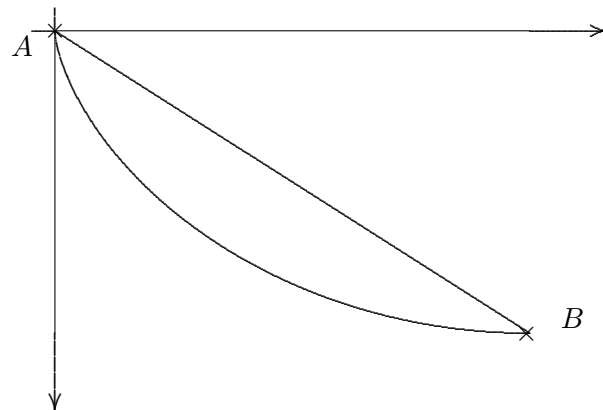


# Das Brachistochrone-Problem

Chr. B.

L. P.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Historisches</b>	<b>2</b>
2.1	Die historische Aufgabenstellung (nach Bernoulli) . . . . .	2
2.2	Biographien . . . . .	2
2.2.1	Johann Bernoulli . . . . .	2
2.2.2	Jakob Bernoulli . . . . .	4
2.2.3	Gottfried Wilhelm Leibniz . . . . .	4
2.3	Historische Lösung nach Johann Bernoulli . . . . .	4
2.4	Historische Lösung nach Galileo Galilei . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Mathematische Voraussetzungen</b>	<b>8</b>
3.1	Länge eines Kurvenstückes . . . . .	8
3.2	Parameterdarstellung . . . . .	9
3.3	Die Zykloide (Rollkurve) . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Näherungslösungen</b>	<b>11</b>
4.1	Formel für die Berechnung der Zeit in Abhängigkeit von $f(x)$ . . . . .	11
4.2	Abwandlung der Formel aus 4.1 für die Anwendung mit Parameterdarstellung	12
4.3	Beispiele . . . . .	13
4.3.1	Gerade . . . . .	13
4.3.2	Ein wenig Physik . . . . .	13
4.3.3	Parabel . . . . .	14
4.3.4	Wurzel . . . . .	15
4.3.5	Sinus . . . . .	15
4.3.6	Ellipse . . . . .	15
4.3.7	Zykloide . . . . .	16
4.4	Vergleich und Auswertung der in 4.3. gefundenen Lösungen . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Fazit</b>	<b>18</b>
<b>6</b>	<b>Anhang</b>	<b>19</b>
6.1	Quelle und Literatur . . . . .	19
6.2	Berechnungen in Maple . . . . .	20

# 1 Einleitung

Wir werden uns auf den folgenden Seiten mit dem Problem beschäftigen, welches Johann Bernoulli im Jahre 1696 veröffentlichte. Es ist das sogenannte Brachistochrone-Problem. Die Situation ist, dass eine Kugel auf dem schnellstmöglichen Weg von einem Punkt A zu einem tiefergelegenen und nach rechts verschobenen Punkt B gleiten soll. Das ganze soll nur unter Einfluss der Schwerkraft geschehen.

Als erstes werden wir uns dafür mit den historischen Lösungen und Bearbeitern beschäftigen und diese und ihre Lösungen darstellen.

Dafür müssen wir uns zuerst einmal mit den mathematischen Grundvoraussetzungen beschäftigen, die man benötigt, um dieses Problem ausreichend zu verstehen und zu bearbeiten. Des Weiteren werden wir betrachten, welche Abweichungen andere Funktionen im Gegensatz zu der exakten Lösung haben und welche Eigenschaften eine Kurve haben muss, um dieser nahe zu kommen.

## 2 Historisches

### 2.1 Die historische Aufgabenstellung (nach Bernoulli)

1696 veröffentlicht Johann Bernoulli erstmals die Problemstellung zur Brachistochrone mit folgendem Wortlaut:

*„Wenn in einer verticalen Ebene zwei Punkte A und B gegeben sind, soll man dem beweglichen Punkte M eine Bahn AMB anweisen, auf welcher er von A ausgehend vermöge seiner eigenen Schwere in kürzester Zeit nach B gelangt.[...]“*

*Damit Liebhaber solcher Dinge Lust bekommen sich an die Lösung dieses Problems zu wagen, mögen sie wissen, dass es nicht, wie es scheinen könnte, blosser Speculation ist und keinen praktischen Nutzen hat. Vielmehr erweist es sich sogar, was man kaum glauben sollte, auch für andere Wissenszweige, als die Mechanik, sehr nützlich. Um einem voreiligen Urtheile entgegenzutreten, möge noch bemerkt werden, dass die gerade Linie AB zwar die kürzeste zwischen A und B ist, jedoch nicht in kürzester Zeit durchlaufen wird. Wohl aber ist die Curve AMB eine den Geometern sehr bekannte; die ich angeben werde, wenn sie nach Verlauf dieses Jahres kein anderer genannt hat.“*

1

Auf diesen Aufruf antwortete nur Leibniz, dem Bernoulli die Aufgabenstellung per Brief schickte. Der riet ihm die Frist um 4 Monate zu verlängern, um auch ausländischen Mathematikern die Chance zu geben, das Problem zu lösen. Das tat er auch im Januar 1697, als er noch einmal die Aufgabenstellung in leicht abgeänderter Form veröffentlichte. Er köderte Mathematiker mit dem guten Namen, den sie nach Lösung des Problems haben würden. Und er verurteilte Menschen, die für so etwas Geld nehmen würden. Diesen Satz fügte er wohl an, da l’Hospital kurz zuvor ein Buch veröffentlichte, in dem er hauptsächlich Lösungen von Johann Bernoulli verwendete, die der ihm verkauft hatte (siehe 2.2.1) und das ärgerte ihn im nachhinein.

Gelöst wurde das Problem von Johann und Jakob Bernoulli, von Gottfried Wilhelm Leibniz, dem Marquis de l’Hospital und von Ehrenfried Walter von Tschirnhausen. Leibniz verzichtete auf die Veröffentlichung seines Lösungsweges, da sich dieser mit dem von Johann Bernoulli ziemlich glich.

Auch Isaac Newton, der Konkurrent von Leibniz, veröffentlichte, wie man später herausfand, in einer englischen Zeitung anonym eine Lösung. Diese wurde allerdings von Johann Bernoulli, als von Newton verfasst, identifiziert. Man sagt, dass Newton dieses Problem in einer Nacht, innerhalb von 12 Stunden gelöst habe.

## 2.2 Biographien

### 2.2.1 Johann Bernoulli

Johann Bernoulli wurde am 27.01.1667 in Basel geboren und kam als zehntes Kind der Familie Bernoulli zur Welt. Sein Vater Nikolaus Bernoulli (1623-1703) war ein reicher

---

<sup>1</sup>Stefan Hübberts; <http://did.mat.uni-bayreuth.de/geonet/beispiele/bernoulli/brachistochronenproblem.html>

Gewürzhändler und außerdem einflussreicher Rats- und Gerichtsherr. Johann Bernoullis Mutter Margaretha Schönauer (1626-1673) stammte aus einer Baseler Bankiersfamilie. Nach dem Besuch des Baseler Gymnasiums schickte sein Vater Johann Bernoulli zu einem Geschäftsfreund nach Neuchâtel, wo er den Gewürzhandel und Französisch erlernen sollte. Bereits nach einem Jahr brach Johann Bernoulli diese Lehre ab und konnte 1683 seinen Vater zu einem Studium überreden. Der damals 16jährige musste vor seinem Studium allerdings ein Vorstudium bestreiten. Er entschloss sich, dies an der Artistenfakultät der Universität Basel zu vollenden. 1685 beendete er erfolgreich sein Vorstudium und erlangte seinen magister artium. Mittlerweile hatte Johann Bernoulli seine Lust und Leidenschaft für Mathematik entdeckt. Allerdings wollte sein Vater, dass er Medizin studierte und 1690 schloss er dieses Studium ab. Während dieser Studienjahre ließ sich Johann Bernoulli heimlich von seinem Bruder Jakob in die elementaren Dinge der Mathematik einführen. Er war aufnahmefähig und lernte schnell, sodass er sich an Untersuchungen seines Bruders über die von Leibniz entwickelte Infinitesimalrechnung in Zusammenhang mit Mechanik beteiligen konnte. Durch den regen Briefwechsel seines Bruders Jakobs entstand auch Kontakt zwischen Leibniz und Johann Bernoulli. Im Oktober 1690 ging Johann Bernoulli nach Genf, wo er u.a. die Lösung des Problems der Kettenlinie mit Hilfe der Infinitesimalrechnung, das schon vor ihm von vielen berühmten Mathematikern diskutiert wurde, aufschrieb. Im September des nächsten Jahres reiste Johann Bernoulli von Genf nach Paris, wo er den Marquis de l'Hospital kennen lernte. In Paris hielten die Franzosen ihn für einen Betrüger, denn so ein junger Mann konnte ja nicht so komplexe Probleme, wie das Kettenproblem, lösen. Deswegen unterzog l'Hospital Johann Bernoulli einem strengen Examen, welches er allerdings mit Bravour bestand. Im Laufe der Zeit beeindruckte Johann Bernoulli mit seinen mathematischen Fähigkeiten so sehr, dass der Marquis de l'Hospital bei Johann Bernoulli als sein Schüler Privatunterricht nahm und dafür sehr gut bezahlte. Im November 1692 kehrte Johann Bernoulli nach Basel zurück und nahm sein Medizinstudium auf. Mit seinem ehemaligen Schüler l'Hospital blieb er in regem Briefkontakt, wobei l'Hospital ihn allerdings mit Fragen und Problemen überhäufte. Dieser Briefkontakt war also kein Austausch, sondern l'Hospital schickte seine Fragen und Bernoulli antwortete. Über diesen Briefwechsel schlossen Bernoulli und l'Hospital einen Vertrag ab. L'Hospital bezahlte Bernoulli jährlich ein halbes Professorengeloh für, dass er seine Probleme bearbeitete. Dafür musste Bernoulli allerdings jegliche Rechte an denen von ihm gefundenen Lösungen an l'Hospital abgeben. Ein folgenschwerer Fehler, denn l'Hospital veröffentlichte 1696 sein Lehrbuch „Analysis des Unendlichkleinen, zum Verständnis der gekrümmten Kurven“. Dieses Buch fand schnell Ruhm und Verbreitung. Was allerdings keiner wusste war, dass es fast komplett aus den Lösungen, welche Bernoulli in Briefen nach Paris schickte bestand. Bernoulli war auf Grund dieser Tatsache sehr deprimiert und vertraute sich nur Leibniz an. Zu dem Zeitpunkt als dieses Buch veröffentlicht wurde, hatte Johann Bernoulli schon eine Professur in Groningen inne, nachdem er sich vor allen Dingen mit dem Vater seiner Frau Dorothea Falkner auseinander gesetzt hatte. Diese Professur trat er am 28.11.1695 an, im Alter von gerade mal 28 Jahren. Im Januar des folgenden Jahres wurde sein erster Sohn Nikolaus bereits ein Jahr alt. 1705 kehrte Johann Bernoulli mit seiner Familie nach Basel zurück, um von seinem verstorbenen Bruder Jakob den Basler Lehrstuhl zu erben, den er bis zu seinem Tode inne hatte. Außerdem gebar seine Frau noch zwei weitere Söhne, Daniel und Johann, die ebenfalls seine Schüler wurden, wie der später bedeutende Mathematiker Leonhard Euler.

### 2.2.2 Jakob Bernoulli

Jakob Bernoulli ist der ältere Bruder von Johann Bernoulli und wurde am 27.12.1654 in Basel geboren. Jakob Bernoulli studierte auf Wunsch seines Vaters evangelische Theologie und heimlich Mathematik an der Universität Basel. Nach seinem Studium machte Jakob Bernoulli mehrere wissenschaftliche Aufenthalte in Frankreich, den Niederlanden, London, Deutschland und der Schweiz. Nach seiner Rückkehr nach Basel gab er zuerst private Vorlesungen über Mechanik an der Universität und musste wegen seines Vaters eine Mathematikprofessur in Heidelberg ablehnen. 1687 allerdings erhielt er eine mathematische Professur in Basel, die er auch annahm. Ab 1687 hatte Jakob Bernoulli Briefkontakt mit Leibniz, in dem viele mathematische Probleme thematisiert wurden, besonders Leibniz' Theorien über die Infinitesimalrechnung. Jakob Bernoulli wurde 1699 auswärtiges Mitglied der Pariser Akademie der Wissenschaften. Am 16. April 1705 starb Jakob Bernoulli in seiner Geburtsstadt Basel.

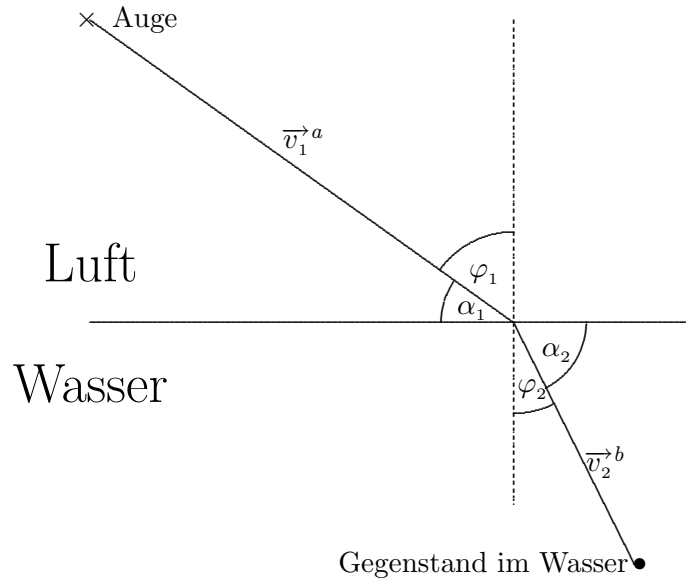
### 2.2.3 Gottfried Wilhelm Leibniz

Der am 1. Juni 1646 in Leipzig geborene Sohn eines Juraprofessors konnte bereits mit ca. 10 Jahren Griechisch und Latein, nachdem er es sich selbst aus illustrierten Büchern beigebracht hatte. Im Alter von 15 Jahren besuchte er bereits die Universität Leipzig und veröffentlichte ein Jahr später sein erstes philosophisches Werk. Mit 18 Jahren erhielt er seinen Magister der Philosophie und der Rechtswissenschaften. 1667 konnte er sich über einen Freund den Posten des Hofrates des Mainzer Kurfürsten sichern. Dieser schickte ihn in politischer Mission 1672 nach Paris, wo er allerdings mehr seine mathematischen Fähigkeiten erweiterte, indem er von dem holländischen Wissenschaftler Christiaan Huygens lernte. 1675 (zurück in Deutschland) entdeckte er nach Studien der Bücher, die ihm Huygens empfohlen hatte, die Infinitesimalrechnung unabhängig von Newton. Sie ist der zusammenfassende Begriff für die Differential- und die Integralrechnung. Wegen finanzieller Probleme tritt er 1676 in den Dienst des hannoverschen Herzogs, für den er die Geschichte des Herrschergeschlechts der Welfen erforschen soll. 1682 wurde er fester Mitarbeiter der Leipziger Wissenschaftszeitung *Acta Eruditorum*, in der er häufig seine neuesten Forschungsergebnisse veröffentlichte. In den folgenden Jahren bereiste er viele Länder, wie z.B. Russland, Österreich, Italien und andere. Dort stand er teilweise als wissenschaftlicher Berater in den Diensten der Herrscher. Am 14. November 1716 verstarb er vereinsamt nach einer langjährigen Krankheit in Hannover. Er veröffentlichte in seinem Leben nur drei abgeschlossene Werke, die alle philosophischer Art waren. Briefwechsel mit über 1100 Brieffpartnern (einer von ihnen war 1696 und später Johann Bernoulli) in 16 Ländern und Veröffentlichungen in wissenschaftlichen Zeitungen bilden einen unvorstellbar großen wissenschaftlichen Nachlass, der bis heute nicht komplett erfasst ist.

## 2.3 Historische Lösung nach Johann Bernoulli

Zu Johann Bernoullis Zeiten wurde noch keine konkrete Abgrenzung zwischen Mathematik und Physik vorgenommen. Und somit ist auch nicht verwunderlich, dass die Lösung von Johann Bernoulli für „sein“ Brachistochrone-Problem einen physikalischen Grundgedanken als Ansatz hat.

Die Grundlage seiner Überlegungen liegt im Fermatschen Prinzip (1657). Dies beruht auf dem Wissen, dass sich das Licht immer den schnellsten Weg sucht und dem Brechungsgesetz von Willebrord Snell.



<sup>a</sup>Lichtgeschwindigkeit in der Luft.      Abb.1  
<sup>b</sup>Lichtgeschwindigkeit im Wasser.

Hier z. B. wählt das Licht im Wasser (Lichtgeschwindigkeit<sub>Wasser</sub> =  $225000 \frac{km}{s}$ ) den kürzeren Weg an die Oberfläche, als den direkten Weg zum Auge. Den Zeitverlust wird es in der schnelleren Materie (Lichtgeschwindigkeit<sub>Luft</sub> =  $300000 \frac{km}{s}$ ) wieder durch eine höhere Geschwindigkeit auf dem längeren Weg ausgleichen.

Auf den Beweis dieses Prinzip verzichten wir an dieser Stelle, da dies zu sehr in die Physik abgleiten würde und uns bei der Lösungsfindung nicht weiter hilft. Wir betrachten es einfach als eine Voraussetzung, die auch Bernoulli bekannt war.

So ähnlich betrachtete auch Johann Bernoulli das Brachistochrone-Problem. Die verschiedenen Geschwindigkeiten in der Materie sind bei uns im aktuellen Zustand (Geschwindigkeit) der Kugel zusehen.

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{v_1}{v_2} \qquad \text{dies gilt nach dem Brechungsgesetz von W. Snell (Snellius, 1621)}$$

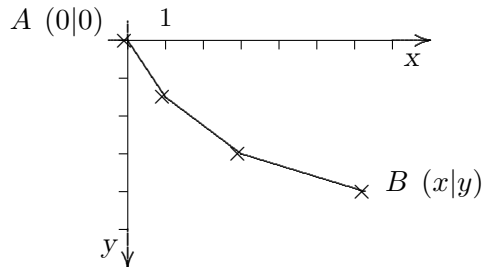
$$\frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2} \qquad \text{folgt aus den Grundsätzen der Geometrie}$$

$$\frac{\cos \alpha}{v} \text{ ist also konstant.}$$

Diese Konstante bezeichnen wir folgend als K:

$$\frac{\cos \alpha}{v} = K$$

Bernoulli betrachtete nun die Kurve der Brachistochrone als einen Polygonzug aus vielen von diesen Brechungen, da dieses Brechungsgesetz auch für mehrere Materiewechsel gilt. Die Polygone sind in ihrer Länge und ihrem Winkel variabel, sie gehorchen dem obigen Gesetz. Eine Annäherung an die Lösung finden wir im Grundsatz unseres Problems. Da die Geschwindigkeit im Laufe des Durchlaufens zunimmt muss  $\alpha$  kleiner werden ( $\cos \alpha$  muss größer werden), um die Konstanz von  $\frac{\cos \alpha}{v}$  zu behalten. Was zeigt, dass unsere gesuchte Kurve mit einer starken Krümmung beginnt und diese Krümmung zum Punkt B hin immer weiter abnimmt.



Wenn sich nun die Polygone einer unendlichen Anzahl annähern, die alle dem obigen Gesetz gehorchen, nähert sich der Polygonzug einer Kurve an. Diese Kurve ist die Brachistochrone, die Kurve mit der geringsten Durchlaufzeit.

Das dies eine Zykloide darstellt, sieht man, wenn man folgende Dinge beachtet:

$$\cos \alpha = K \cdot v$$

$v$  ist gleichzusetzen mit der physikalischen Formel für den „freien Fall“ :

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot y}$$

$$\cos \alpha = K \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot y}$$

daraus folgt:

$$\cos \alpha = \sqrt{K^2 \cdot 2 \cdot g \cdot y}$$

Wenn man die in dieser Formel vorhandenen Konstanten, also  $2$ ,  $g$  und  $K$  zu einer weiteren Konstanten  $k$  folgendermaßen zusammenfasst,

$$k = \frac{1}{2 \cdot g \cdot K^2}$$

ergibt sich:

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{y}{k}}$$

Unabhängig davon gilt:

$$\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

Die Ankathete entspricht, wie der Abb. 1 entnehmbar, bei äußerst kleinen Dreiecken  $dx$ , während die Hypotenuse durch den Satz des Pythagoras  $\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$  entspricht. Also gilt:

$$\cos \alpha = \frac{dx}{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}$$



Wenn man die beiden Formeln von  $\cos \alpha$  gleichsetzt, erhält man:

$$\frac{dx}{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}} = \sqrt{\frac{y}{k}}$$

Durch Quadrieren erhält man dann:

$$\frac{(dx)^2}{(dx)^2 + (dy)^2} = \frac{y}{k}$$

Wenn man diese Gleichung nach  $\frac{dy}{dx}$  auflöst, erhält man folgende Differentialgleichung, denn  $\frac{dy}{dx}$  entspricht  $y'$ :

$$\frac{dy}{dx} = y' = \sqrt{\frac{k-y}{y}}$$

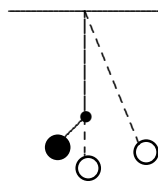
Johann Bernoulli war diese Differentialgleichung bekannt und die einzige Lösung dafür ist die Zykloide in der Parameterdarstellung, wobei die Konstante  $k$  dem Durchmesser des Kreises entspricht:

$$x(t) = \frac{k}{2}(t - \sin t), \quad y(t) = \frac{k}{2}(1 - \cos t)$$

## 2.4 Historische Lösung nach Galileo Galilei

Auch der berühmte Mathematiker und Physiker Galileo Galilei behandelte bereits 1638 (also bevor Johann Bernoulli die Aufgabe stellte) das Problem des schnellsten Weges einer Kugel von  $A$  nach  $B$ .

Galilei bemerkte, dass die Zeit, die die Kugel von  $A$  nach  $B$  benötigt (im folgenden Durchlaufzeit genannt), auf einem Polygonzug kürzer ist, als die Durchlaufzeit der Strecke  $\overline{AB}$ . Dies berechnete er mit Formeln für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung („schiefe Ebene“ siehe 4.3.2) und seinen Erkenntnissen, die er am sog. Galilei-Pendel (siehe Abbildung) gewann, an dem er die Eigenschaften der Geschwindigkeiten einer schwingenden Kugel erforschte.



Er bemerkte, dass sich die Durchlaufzeit entgegengesetzt proportional zur Eckenzahl verhält, also sich verringert, je mehr Polygone wir für unseren Polygonzug verwenden. Da sich der Polygonzug bei zunehmender Polygonzahl dem Kreis immer mehr annähert, vermutete Galilei diesen als die schnellste Kurve.

Was er allerdings nicht beachtete, war dass die Polygone nicht alle die gleiche Länge haben müssen und sich der Polygonzug daher nicht zwangsläufig dem Kreis annähert.

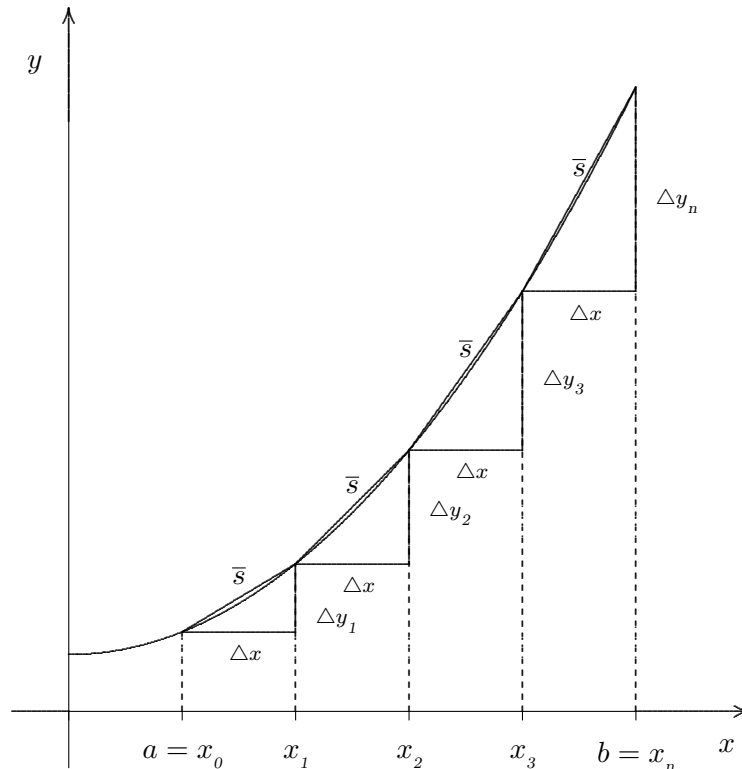
Bernoulli betrachtete auch einen solchen Polygonzug. Seine Polygone (siehe 2.3) waren allerdings nahe dem Punkt  $A$  länger, als die nahe dem Punkt  $B$  und damit näherte sich der Zug bei ihm nicht dem absolut regelmäßigen Kreis an.

Somit sehen wir, dass die Lösung von Galilei zwar eine gute Näherungslösung darstellt, allerdings nicht die gesuchte exakte Kurve enthält.

### 3 Mathematische Voraussetzungen

#### 3.1 Länge eines Kurvenstückes

Für die Berechnung der Länge  $s$  eines Kurvenstückes  $K$  in dem Intervall  $I$  mit den Grenzen  $a$  und  $b$  ist als Voraussetzung notwendig, dass die Ableitung  $f'$  in dem Intervall  $I$  stetig ist. Das zu betrachtende Kurvenstück wird in dem Intervall in  $n$  gleichlange Teilintervalle geteilt. Dadurch entstehen zwischen  $a$  und  $b$  mehrere Punkte, welche durch Sekanten mit dem nächstliegenden Punkt verbunden werden.



Für die Berechnung der Länge  $\bar{s}$  einer Sekante zwischen zwei unterschiedlichen Punkten auf der Kurve gilt, durch den Satz des Pythagoras folgendes:

$$\bar{s} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_n)^2}$$

Wenn diese Länge zu jeder Sekante zwischen  $a$  und  $b$  berechnet wird, entsteht ein Sekantenzug:

$$s_{\text{Sekantenzug}} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_1)^2} + \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_2)^2} + \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_3)^2} + \dots + \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_n)^2}$$

Wenn man das  $(\Delta x)^2$  unter der Wurzel folgendermaßen ausklammert:

$$\sqrt{(\Delta x)^2 \cdot \left(1 + \left(\frac{\Delta y_n}{\Delta x}\right)^2\right)} \quad \text{folgt daraus} \quad \Delta x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_n}{\Delta x}\right)^2}$$

und es entsteht folgende Formel für den Sekantenzug:

$$s_{\text{Sekantenzug}} = \Delta x \cdot \left( \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_1}{\Delta x}\right)^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_2}{\Delta x}\right)^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_3}{\Delta x}\right)^2} + \dots + \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_n}{\Delta x}\right)^2} \right)$$

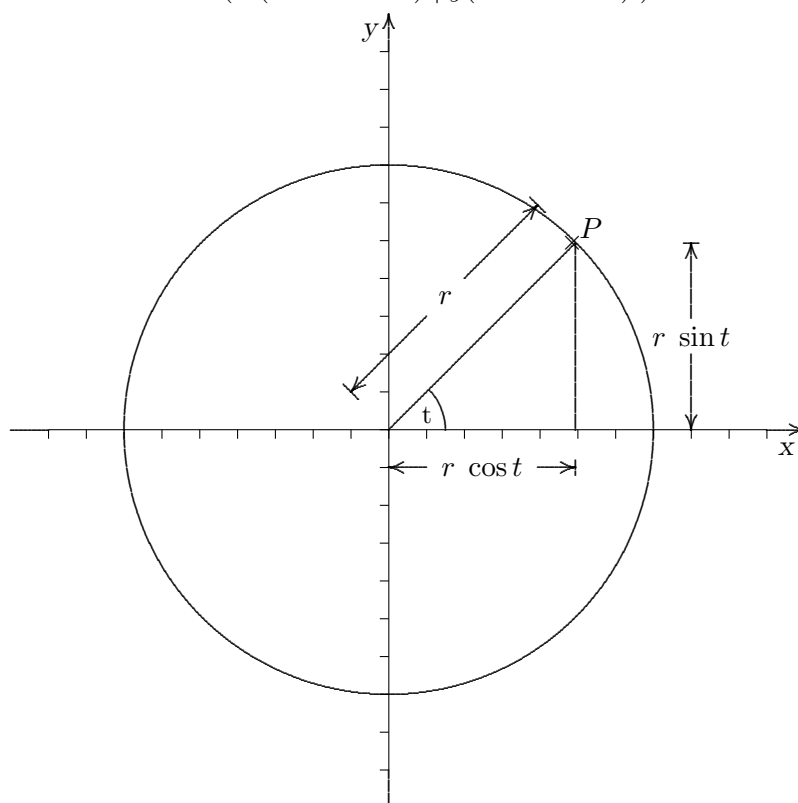
Wenn  $n \rightarrow \infty$  dann hat dies zur Folge, dass sich der Sekantenzug dem Kurvenstück annähert und  $\Delta x \rightarrow 0$ , wenn man dann berücksichtigt, dass  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  gegen  $f'(x)$  strebt, dann folgt daraus, nach der Definition des Integrals:

$$s_{\text{Kurvenstück}} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

## 3.2 Parameterdarstellung

Es gibt Kurven in der Mathematik, die sich nicht durch Funktionen beschreiben lassen. Das bekannteste und einfachste Beispiel ist der Kreis. Dieser lässt sich nicht durch eine Funktion beschreiben, da es für jeden  $x$ -Wert immer zwei  $y$ -Werte geben müsste und außerdem ab  $x = r$  (wobei  $r$  den Radius des Kreises beschreibt) die Definition dieser Funktion zu Ende sein müsste. Dies ist möglich, wenn man seine Punkte durch zwei verschiedene Funktionen beschreibt. Dies tun wir mit Hilfe von einfachen Winkelsätzen.

$$P ( x(\text{Parameter}) \mid y(\text{Parameter}) )$$



$$P ( r \cos t \mid r \sin t )$$

man schreibt :  $x(t) = r \cos t$  ;  $y(t) = r \sin t$

Nun ist der  $y$ -Wert nicht mehr von  $x$  abhängig, sondern beide Koordinaten sind von dem Parameter (hier  $t$ ) abhängig.

Nun kann man für jedes  $t$  einen Punkt bestimmen und dadurch einen Kreis genau beschreiben.

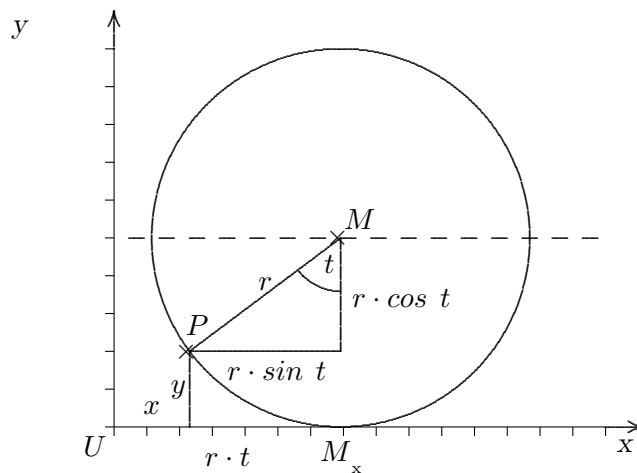
Im Prinzip lässt sich allerdings jede mathematische Funktion in Parameterdarstellung darstellen. Dies sieht dann folgendermaßen aus:

$$x(t) = t ; y(t) = f(t)$$

Weitere Elemente, die sich nur mit der Parameterdarstellung darstellen lassen, sind z.B. die Ellipse (siehe 4.3.6) und die Zykloide (siehe 3.3 und 4.3.7).

### 3.3 Die Zykloide (Rollkurve)

Ein Kreis mit dem Radius  $r$  befindet sich in einem Koordinatensystem. Der Punkt  $P$  auf dem Kreis liegt im Ursprung. Wenn sich dieser Kreis abrollt, sodass sich der Mittelpunkt  $M$  auf einer Parallelen zur  $x$ -Achse bewegt, beschreibt der Punkt  $P$  eine Kurve.



Um diese Kurve in Parameterdarstellung wiederzugeben, wählt man als Parameter den Winkel  $t$  im Bogenmaß. Weil die Strecke  $\overline{UM_x}$  der Kreisbogenlänge  $\widehat{M_x P}$  entspricht, nämlich  $r \cdot t$ ,

gilt für  $x$ :

$$\begin{aligned} x &= r \cdot t - r \cdot \sin t \\ \Rightarrow x &= r(t - \sin t) \end{aligned}$$

dementsprechend gilt für  $y$ :

$$\begin{aligned} y &= r - r \cdot \cos t \\ \Rightarrow y &= r(1 - \cos t) \end{aligned}$$

bzw.:

$$x(t) = r(t - \sin t) ; y(t) = r(1 - \cos t)$$

Diese Kurve, die der Punkt  $P$  beschreibt, ist durch die Parameterdarstellung definiert und trägt den Namen Zykloide.

$x(t) = r(t - \sin t) ; y(t) = r(1 - \cos t)$
---

## 4 Näherungslösungen

### 4.1 Formel für die Berechnung der Zeit in Abhängigkeit von $f(x)$

Zwischen zwei untereinander liegenden Punkten  $P_1$  und  $P_2$  wird der schnellste Weg, unter Berücksichtigung der Schwerkraft, allerdings ohne Reibung, gesucht.

Dafür benötigt man eine Formel, die die Durchlaufzeit  $T$  zwischen  $P_1$  und  $P_2$  berechnet. Geschwindigkeit  $v$  ist physikalisch definiert, als Weg  $s$  pro Zeit  $t$ . Dadurch kann man folgenden Zusammenhang für jeden Punkt auf der Kurve zwischen den beiden Punkten herstellen:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Für  $v$  gilt die Formel des „freien Falles“, welche in Abhängigkeit von  $s$ , welches dem Funktionswert  $f(x)$  entspricht, und der gravitationsbedingten Erdbeschleunigung  $g$  steht:

$$v = \sqrt{2g \cdot f(x)}$$

$s$  entspricht der Länge eines Kurvenstückes, weshalb man  $ds$  als Ableitung des Kurvenstückes (siehe 3.1) betrachten kann:

$$s_{\text{Kurvenstück}} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

$$ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Wenn man diese drei Formeln miteinander verknüpft, entsteht folgender Zusammenhang:

$$dt = \frac{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}{\sqrt{2g \cdot f(x)}} dx$$

bzw.

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}{\sqrt{f(x)}} dx$$

Zum Abschluss gibt es nur noch zu berücksichtigen, dass:

$$T = \int_{x_0}^{x_1} dt$$

Daraus folgt dann die endgültige Formel für die Durchlaufzeit  $T$  in Abhängigkeit von  $x$ :

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^x \frac{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}{\sqrt{f(x)}} dx$$

## 4.2 Abwandlung der Formel aus 4.1 für die Anwendung mit Parameterdarstellung

Um unsere Formel für  $T$  aus 4.1 auch auf die Ellipse und die Zykloide anwenden zu können, müssen wir sie an die Parameterdarstellung anpassen. Wir leiteten die Formel aus  $t = \frac{s}{v}$  ab und dabei war

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \frac{(y'(t))^2}{(x'(t))^2}} dx \quad \text{weil gilt : } f'(x) = \frac{dy}{dx} \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

Da wir nun aber kein  $x$  mehr als Parameter haben, sondern unsere Funktion abhängig von  $t$  ist, müssen wir das  $dx$  des Integrals in ein  $dt$  umwandeln.

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{(x'(t))^2}{(x'(t))^2} + \frac{(y'(t))^2}{(x'(t))^2}} dx \quad \text{erweitert mit } \frac{(x'(t))^2}{(x'(t))^2}$$

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \frac{1}{x'(t)} dx \quad \frac{1}{(x'(t))^2} \text{ ausgeklammert}$$

Weil laut Differentialrechnung gilt :

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} \quad ; \quad dt = \frac{dx}{x'(t)}$$

folgt :

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Das  $f(x)$  in unserer Formel aus 4.1 können wir durch ein  $y(t)$  ersetzen, da der  $y$ -Wert (in der Parameterdarstellung  $y(t)$ ) eines jeden Punktes die Höhe des Punktes angibt und wir haben in 4.1  $f(x)$  als Höhe in die Formel für den freien Fall eingesetzt.

Deshalb gilt, bei einer in Parameterdarstellung angegebenen Funktion, folgende Formel für die Berechnung der Zeit:

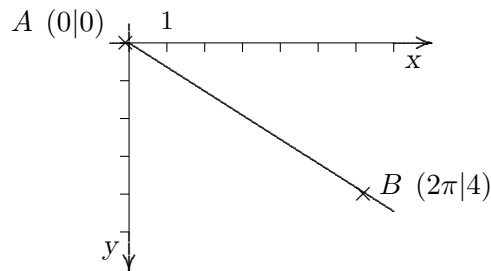
$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{\sqrt{y(t)}} dt$$

## 4.3 Beispiele

### 4.3.1 Gerade

Als einfachstes Beispiel benutzen wir die Gerade. Wir nehmen eine mit der folgenden Geradengleichung, damit die Gerade durch die gleichen Punkte geht, wie Zykloide, Ellipse u.s.w.:

$$f(x) = \frac{4}{2\pi} x$$



Nun lassen wir die Kugel vom Punkt  $A(0|0)$  zum Punkt  $B(2\pi|4)$  gleiten. Die Zeit rechnen wir mit der in 4.1 gefundenen Formel aus.

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^x \frac{\sqrt{1 + f'(x)}}{\sqrt{f(x)}} dx$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 9.80665}} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{2}{\pi}\right)^2}}{\sqrt{\frac{4}{2\pi}x}} dx$$

Wenn wir dies nun mit den gesetzten Grenzen integrieren, kommt dabei  $T = 1,681847822$  heraus.

### 4.3.2 Ein wenig Physik

Um die Richtigkeit unserer gefundenen Lösung aus 4.3.1 zu überprüfen, wollen wir die Lösung mit einer Lösung aus der Physik vergleichen. Dazu nehmen wir die Formel für die schiefe Ebene:

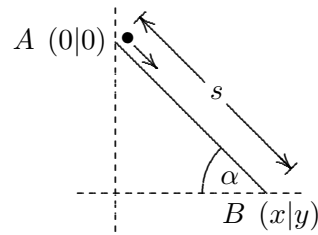
$$s = \frac{1}{2} g t^2 \sin \alpha$$

Dabei bedeuten:

$s$  = Betrag des in der Zeit  $t$  zurückgelegten Weges,

$g$  = Betrag der Fallbeschleunigung,

$\alpha$  = Neigungswinkel der schiefen Ebene.



Wir formen sie nach  $t$  um:

$$t = \sqrt{\frac{2 s}{g \sin \alpha}}$$

Setzen unsere Werte aus 3.1.2 ein:

$$s = \sqrt{16 + 4\pi^2} m$$

$$g = 9,80665 \frac{m}{s^2}$$

$$\alpha = 32,48^\circ$$

Dann bekommen wir  $t = 1,681847822 s$ , was sich mit unserer Lösung aus 4.3.1 exakt deckt. Womit die Richtigkeit unseres Ergebnisses unserer Lösung (aus 4.3.1) und Formel (aus 4.1) bestätigt wäre.

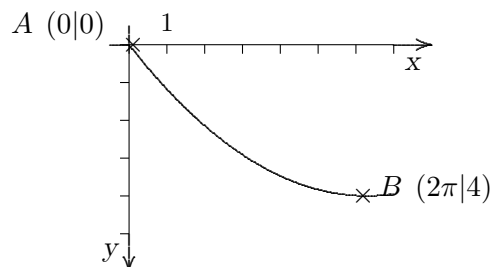
Durch diese Physikformel haben wir dann auch gleich die Einheit unseres Ergebnisses für  $T$ . Wenn wir dann die Einteilung nehmen, dass ein  $x$  ein Meter lang ist, ist unser Ergebnis in Sekunden.

$$[t] = \left[ \sqrt{\frac{2 s}{g \sin \alpha}} \right] = \sqrt{\frac{m s^2}{m}} = s$$

### 4.3.3 Parabel

Nun betrachten wir die Zeit, die die Kugel für die Strecke  $\overline{AB}$  auf der Bahn einer Parabel benötigt. Auch hier können wir auf Grund der Punkte keine Normalparabel verwenden, sondern benutzen eine gestreckte und verschobene Parabel, die ihren Extremwert in unserem Punkt  $B$  hat, mit der Gleichung:

$$f(x) = -\frac{4}{(2\pi)^2} (2\pi - x)^2 + 4$$



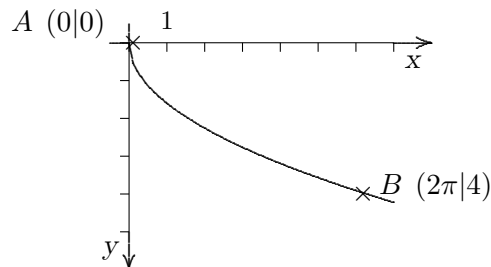
Diese setzen wir jetzt nun wieder in unsere Formel für  $T$  ein und bekommen dabei die Zeit  $T = 1,479595357$  heraus. Dadurch sehen wir schon einmal, dass der kürzeste Weg auf keinen Fall der schnellste ist ( $s_{\text{Gerade}} = 7,45$  und  $s_{\text{Parabel}} = 7,71$ ).



#### 4.3.4 Wurzel

Nun wollen wir noch andere rationale Funktionen betrachten, bei denen die Krümmung des Grafen noch anders ist. Ein weiteres, einfaches Beispiel dafür ist die Wurzelfunktion. Hier betrachten wir die Funktion mit der Gleichung:

$$f(x) = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{x}$$



In die Formel für  $T$  aus 4.1.1 eingesetzt, kommt  $T = 1,432652422$  heraus.

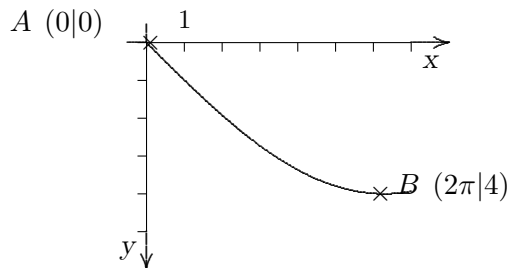
#### 4.3.5 Sinus

Eine weitere Beispielfunktion, die wir betrachten wollen, ist der Sinus. Für ihn haben wir eine Funktion erstellt, die wie folgt aussieht:

$$f(x) = 4 \sin \frac{x}{4}$$

Der Sinus hat seinen Extremwert bei  $2\pi$  (Bogenmaß).

Diese sieht wie folgt aus:



Und sie benötigt  $T = 1,519019985$ , um die Strecke  $\overline{AB}$  zu bewältigen.

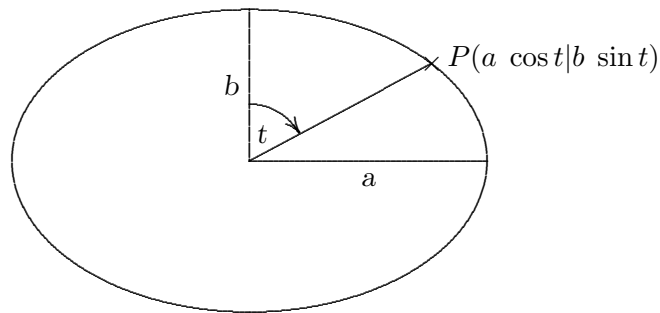
#### 4.3.6 Ellipse

Nun betrachten wir zum ersten Mal ein mathematisches Objekt, das sich nicht durch eine Funktion beschreiben lässt, sondern in der Parameterdarstellung (siehe 3.2 und 4.2) definiert ist (abgeleitet von der Parameterdarstellung des Kreises).

Die Standarddefinition der Ellipse ist:

$$x(t) = a \cos t ; y(t) = b \sin t$$

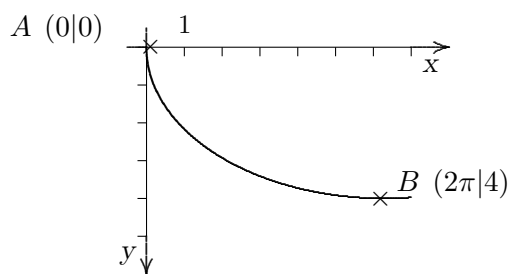
Wobei die Variablen wie folgt zu verstehen sind:



Wir nehmen wieder eine spezielle Ellipse, zur Angleichung an unsere Vergleichspunkte:

$$x(t) = 2\pi \cos t + 2\pi ; y(t) = 4 \sin t$$

Wir betrachten nun ein Viertel von dieser Ellipse.



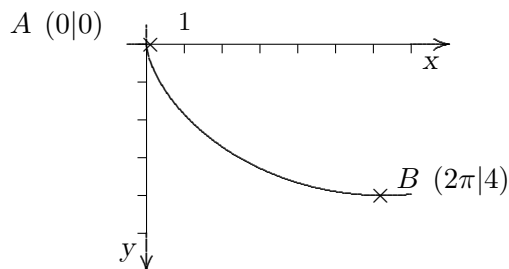
Wir geben nun die Parameterdarstellung der Ellipse in unsere Formel aus 4.1.2 ein und bekommen als Ergebnis:  $T = 1,424070525$

#### 4.3.7 Zykloide

Abschließend wollen wir natürlich auch noch die schnellste Kurve betrachten. Diese ist nach Bernoulli (siehe 2.3) die Zykloide (siehe 3.3). Wir nehmen eine Zykloide mit der Parameterdarstellung:

$$x(t) = 2(t - \sin t) ; y(t) = 2(1 - \cos t)$$

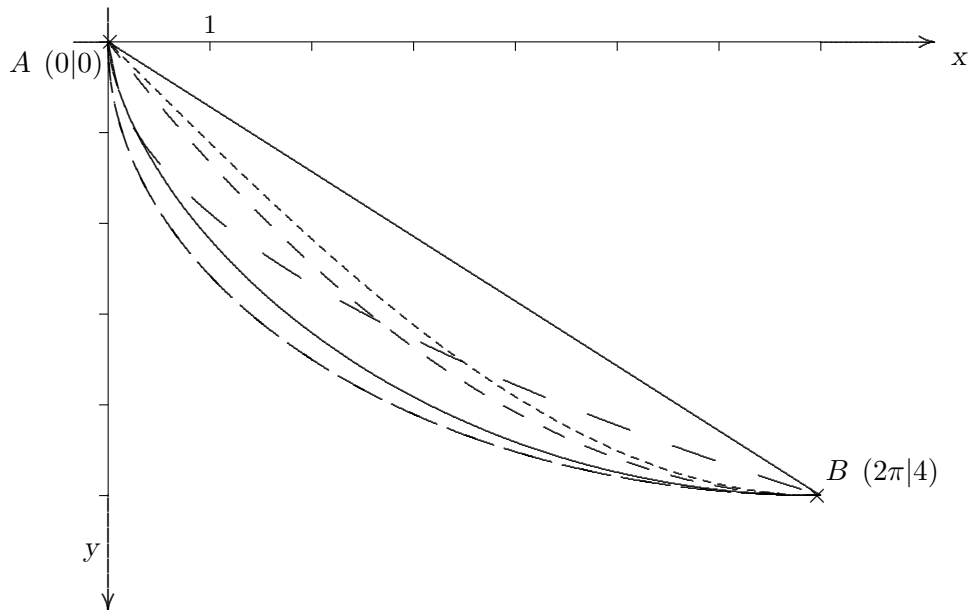
Diese sieht folgendermaßen aus:



Nun geben wir die Funktionsterme, wie bei der Ellipse, in die Formel aus 4.1.2 ein und bekommen die Zeit  $T = 1,418745617$ .

## 4.4 Vergleich und Auswertung der in 4.3. gefundenen Lösungen

Wir haben in 4.3 die Zeiten für einige Beispiele ausgerechnet und nun wollen wir die Zeiten einmal vergleichen.



Nr.	Funktion	Länge	Zeit	Linie
4.3.1	Gerade	7,45 m	1,682 s	—————
4.3.5	Sinus	7,64 m	1,519 s	-----
4.3.3	Parabel	7,71 m	1,480 s	- - - - -
4.3.4	Wurzel	7,78 m	1,433 s	___ ___
4.3.6	Ellipse	8,18 m	1,424 s	—————
4.3.7	Zykloide	8 m	1,419 s	—————

Wir sehen hier, dass die Zykloide, trotz der zweitlängsten Strecke, am wenigsten Zeit benötigt um die Strecke  $\overline{AB}$  zu bewältigen. Dies ist zwar kein Beweis für die Lösung von Johann Bernoulli, untermauert seine Lösung aber.

Wir können in der Zeichnung mit allen betrachteten Grafen erkennen, dass die Kurven die Schnelleren darstellen, bei denen die Kugel am Anfang steiler abfällt und damit Geschwindigkeit aufnimmt und diese auf der längeren Strecke ausnutzt und damit schneller beim Punkt  $B$  ankommt. Bei der Ellipse allerdings ist das Verhältnis von Geschwindigkeit und Strecke nicht mehr optimal. Der Schwung reicht nicht aus um die längere Strecke zu kompensieren.

## 5 Fazit

Rückblickend ist zu sagen, dass das Brachistochrone-Problem eine sehr komplexe Aufgabe ist, die schon zur Zeit seiner Entstehung die angesehensten Mathematiker beschäftigt hat. Natürlich war die Mathematik noch nicht so weit entwickelt wie heute, beispielsweise war die Differentialrechnung noch in den Kinderschuhen, aber gerade das macht es heute interessant die damalige Problemstellung nachzuvollziehen.

Für uns war es dennoch manchmal schwierig, sich in die damaligen Zeiten hineinzusetzen. Beispielsweise sind Probleme aufgetreten, als wir verschiedene Funktionen in die hergeleitete Formel für die Durchlaufzeitberechnung eingesetzt haben. Die damaligen Koordinatensysteme für dieses Problem wurden so gewählt, dass die Zeitberechnung im Ursprung beginnen, dann allerdings „runterlaufen“, die Funktionswerte dennoch größer werden, also die y-Achse nach unten zeigt. Bei der Zeitberechnung mit sehr komplexen Integralen war uns die Mathematik-Software Maple eine sehr große Hilfe, die uns einige zeitraubende Zwischenschritte erspart hat.

Außerdem waren uns die mathematischen Grundvoraussetzungen Länge eines Kurvenstückes, Parameterdarstellung und Zykloide gänzlich unbekannt, sodass wir uns mit ihnen erst einmal vertraut machen mussten. Wir wollten sie ebenfalls verstehen, herleiten und uns nicht mit den Endformeln begnügen.

Abschließend lässt sich allerdings sagen, dass die Problemstellung aufgrund ihrer Praxisnähe interessant zu bearbeiten war. Außerdem konnten wir unsere Kenntnisse aus der Physik mit in unsere Facharbeit einbringen, was das Problem während der Bearbeitung nicht eintönig erscheinen ließ.

## 6 Anhang

### 6.1 Quelle und Literatur

#### *Literatur:*

- 1) Höfling,  
*Physik Formeln und Einheiten Sekundarstufe II,*  
Aulis Verlag Deubner und Co KG 1999
- 2) Sieber,  
*Mathematische Formeln,*  
Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 1986
- 3) Kopien vom Fachlehrer

#### *Internetquellen:*

- 1) Stefan Hübbers,  
<http://did.mat.uni-bayreuth.de/geonet/beispiele/bernoulli/index.html>  
Zulassungsarbeit für das Lehramt an Realschulen,  
Universität Bayreuth,  
05. Oktober 1998
- 2) Lexikon,  
<http://www.wissen.de>,  
Biographien:  
Johann Bernoulli  
Jakob Bernoulli  
Gottfried Wilhelm Leibniz
- 3) Biographie Leibniz,  
<http://www.leibniz-igb.de/leibniz.htm>,
- 4) Dr. Alfred Wagner,  
Ansatz zur Lösung des Brachistochrone-Problems auf Bernoullis Weise,  
[http://www.zuv.unibas.ch/uni\\_nova/087/pdf/UNI\\_NOVA\\_87-36-40.pdf](http://www.zuv.unibas.ch/uni_nova/087/pdf/UNI_NOVA_87-36-40.pdf),  
Die Variationsrechnung und ihre Baseler Ursprünge
- 5) Rollkurven, Parameterdarstellung  
<http://www.lo-net.de/home/roolfs>

## 6.2 Berechnungen in Maple

...