schreier@math.tu-freiberg.de
(03731) 39 2261

3. Tilgungsrechnung

Die Tilgungsrechnung beschäftigt sich mit der Rückzahlung von Krediten, Darlehen und Hypotheken. Dabei erwartet der Gläubiger, daß der Schuldner seine Schuld verzinst und sie wie vereinbart zurückzahlt.

Wird eine Schuld nicht auf einmal im Gesamtbetrag, sondern in Teilbeträgen zurückgezahlt, so spricht man von einer Tilgungs- oder Amortisationsschuld. Für sie pflegt man besondere Tilgungspläne aufzustellen, aus denen der Tilgungsvorgang und die laufende Verzinsung der Schuldreste für jedes Jahr ersichtlich sind. Es wird vorausgesetzt, daß eine Schuld einschließlich der anfallenden Zinsen nach einer festgelegten Anzahl von Zinsperioden vollständig getilgt sein muß. Im allgemeinen werden in gleichen Zeitabständen Rückzahlungsleistungen erbracht. Die Zahlungsperioden können dabei mit den Zinsperioden übereinstimmen, eine Zinsperiode kann aber auch in mehrere gleich lange Tilgungsperioden unterteilt werden. Rückzahlungen können zu den Verzinsungszeitpunkten, zwischen und zu den Verzinsungszeitpunkten, vorschüssig oder nachschüssig vorgenommen werden. Die Zinsen können in jeder Zinsperiode vorschüssig oder nachschüssig erhoben werden.

Alle möglichen Kombinationen der einzelnen Fälle würde zu einer sehr großen Anzahl von Tilgungsplänen führen. Aus diesem Grund erfolgt eine Beschränkung auf die gebräuchlichsten Rückzahlungspläne mit nachschüssiger Tilgung und nachschüssiger Zinszahlung.

3.1. Tilgungsarten

Definition 3.1

Es liege eine Gesamtschuld K_0 vor. Der Betrag T_j, der am Ende der j-ten Zahlungsperiode zum Abtragen der Schuld entrichtet wird, heißt *Tilgungsrate*. Die am Ende der Periode verbleibende Restschuld wird mit K_j bezeichnet.

Definition 3.2

Die Summe A_j aus Zinszahlungen Z_j und Tilgung T_j der Periode j heißt *Annuität*.

Bemerkung

Die Zinsen Z_j sollen nachschüssig am Ende einer Periode zu den Zinsterminen gezahlt werden. Sie beziehen sich dabei stets auf die Restschuld K_{j-1}. Als Periodendauer sei ein Jahr vereinbart.

Bei Krediten mit kurzer Laufzeit und monatlicher Zahlung werden die Zinsen oft nur auf die Gesamtschuld bezogen. Dann stimmt der vorgegebene nominelle Zinssatz i nicht mehr mit dem zugehörigen Effektivzinssatz überein.

Definition 3.3

Sind alle Tilgungsraten T_j konstant, so spricht man von *Ratentilgung*. Sind alle Annuitäten A_j konstant, so liegt *Annuitätentilgung* vor.

Definition 3.4

Zwei Zahlungsfolgen heißen *äquivalent*, wenn die Barwerte beider Zahlungsfolgen, bezogen auf den gleichen Zeitpunkt, übereinstimmen.

3.2. Ratentilgung

Satz 3.1

Wird eine Schuld K_0 nachschüssig n Jahre lang durch Ratentilgung bei einem Zinssatz i abgetragen, so gilt

$$T = \frac{K_0}{n} \tag{3.1}$$

$$K_j = K_0 \left(1 - \frac{j}{n}\right) , \qquad \text{j=1,...,n} \tag{3.2}$$

$$Z_j = K_0\, i \left(1 - \frac{j-1}{n}\right) , \qquad \text{j=1,...,n} \tag{3.3}$$

$$A_j = \frac{K_0}{n} \left(1 + (n - j + 1)\, i\right) , \qquad \text{j=1,...,n} \tag{3.4}$$

Bemerkung

Für die Summe der Zinszahlungen gilt $Z_G = \frac{n+1}{2} K_0\, i$.

Für die Summe aller Annuitäten gilt $A_G = K_0 \left(1 + \frac{n+1}{2}\, i\right)$.

Beispiel 3.1

Ein Grundstück im Wert von 200.000 € soll verkauft werden. Der Käufer zahlt 50.000 € und will den Restbetrag in 5 Jahren jeweils zum Jahresende tilgen.
Es ist ein Tilgungsplan für die Ratentilgung mit einer Verzinsung von 8 % zu erstellen!

$$K_0 = 150.000 \qquad i = 0,08 \qquad n = 5$$

$$T = \frac{150.000}{5} = 30.000$$

Tilgungsplan:

j	K_{j-1}	Z_j	T_j	A_j
1	150.000,00	12.000,00	30.000,00	42.000,00
2	120.000,00	9.600,00	30.000,00	39.600,00
3	90.000,00	7.200,00	30.000,00	37.200,00
4	60.000,00	4.800,00	30.000,00	34.800,00
5	30.000,00	2.400,00	30.000,00	32.400,00
	0,00	36.000,00	150.000,00	186.000,00

Satz 3.2

Für die Barwerte T_0 aller Tilgungsraten und Z_0 aller Zinszahlungen bei n-jähriger Ratentilgung einer Schuld K_0 gilt

$$T_0 = \frac{K_0}{n}\, a_n \tag{3.5}$$

$$Z_0 = K_0 \left(1 - \frac{a_n}{n}\right) \tag{3.6}$$

Bemerkung

Für den Barwert aller Annuitäten gilt

$$A_0 = T_0 + Z_0 = (T a_n) + (K_0 - T a_n) = K_0 \ ,$$

womit das Äquivalenzprinzip bei Ratentilgung eingehalten wird.

Nimmt man einen Kredit in Höhe K_0 auf, der in Ratentilgung abzutragen ist, dann spiegelt das Verhältnis Z_0 als Barwert aller Zinszahlungen zu K_0 die Kosten des Kredites wieder.

Empfehlung

Unterjährige Tilgung einer Ratenschuld [Bo] S. 48-52

3.3. Annuitätentilgung

Satz 3.3

Wird eine Schuld K_0 nachschüssig n Jahre lang durch Annuitätentilgung bei einem Zinssatz i und damit Aufzinsungsfaktor $q = 1 + i$ abgetragen, so gilt

$$T_1 = K_0 \frac{q-1}{q^n - 1} \tag{3.7}$$

$$T_j = T_1 \, q^{j-1} \ , \qquad \text{j=2,...,n} \tag{3.8}$$

$$Z_j = K_0 \, i - T_1 \, (q^{j-1} - 1) \ , \qquad \text{j=1,...,n} \tag{3.9}$$

$$K_j = K_0 \left(1 - \frac{q^j - 1}{q^n - 1}\right) \ , \qquad \text{j=1,...,n} \tag{3.10}$$

$$A = K_0 \, q^n \frac{q-1}{q^n - 1} \tag{3.11}$$

Bemerkung

Da jährlich konstante Annuitäten gezahlt werden, kann die Schuld K_0 als Barwert einer nachschüssigen Rente in Höhe der Annuität angesehen werden:

$$K_0 = \frac{A}{q^n} \frac{q^n - 1}{q - 1} = A a_n$$

Damit ist auch für die Annuitätentilgung das Äquivalenzprinzip gültig.

Bemerkung

Die Größe $w_n = \dfrac{1}{a_n} = q^n \dfrac{q-1}{q^n - 1}$ heißt *Annuitäten-* oder *Kapitalwiedergewinnungsfaktor*.
Er gibt die jährliche Rate der Wiedergewinnung einer Geldeinheit an.

Bemerkung

Berechnet man zuerst die Annuität $A = K_0 \, w_n$, so kann man die anderen Größen in Abhängigkeit von A wie folgt berechnen:

$$T_j = A \, v^{n+1-j} \ , \qquad \text{j=1,...,n}$$

$$Z_j = A \, (1 - v^{n+1-j}) \ , \qquad \text{j=1,...,n}$$

$$K_j = A \, a_{n-j} \ , \qquad \text{j=1,...,n}$$

Insbesondere gilt auch

$$A = T_1 q^n,$$

was im Vergleich mit (3.8) die Eigenschaft $T_{n+1} = A$, $Z_{n+1} = 0$ liefert und

$$K_0 = T_1 s_n.$$

Bemerkung

Für die Summe aller Zahlungen bei Annuitätentilgung gilt:

$$A_G = nA = nK_0 q^n \frac{q-1}{q^n-1}$$

Für die Summe der Zinszahlungen gilt:

$$Z_G = A_G - K_0 = K_0 \left(nq^n \frac{q-1}{q^n-1} - 1 \right)$$

Bemerkung

Die Tilgungsraten bei Annuitätentilgung bilden eine geometrisch wachsende Folge. Gegenüber der Ratentilgung sind sie deshalb zuerst kleiner und später größer. Damit sind die Restschulden bei Annuitätentilgung stets größer als bei der Ratentilgung. Folglich fallen die Zinszahlungen höher aus.

Beispiel 3.1 (Fortsetzung)

Erstelle einen Tilgungsplan für die Annuitätentilgung!

$$A = 150.000 \cdot 1,08^5 \cdot \frac{0,08}{1,08^5 - 1} = 37.568,47$$

Tilgungsplan:

j	K_{j-1}	Z_j	T_j	A_j
1	150.000,00	12.000,00	25.568,47	37.568,47
2	124.431,53	9.954,52	27.613,95	37.568,47
3	96.817,58	7.745,41	29.823,06	37.568,47
4	66.994,52	5.359,56	32.208,91	37.568,47
5	34.785,61	2.782,85	34.785,62	37.568,47
	-0,01	37.842,34	150.000,01	187.842,35

Die Zinszahlung erhöht sich gegenüber der Ratentilgung um 1.842,34 €.

Satz 3.4

Für die Barwerte T_0 aller Tilgungsraten und Z_0 aller Zinszahlungen bei n-jähriger Annuitätentilgung einer Schuld K_0 gilt

$$T_0 = \frac{n}{s_n\, q} K_0 \tag{3.12}$$

$$Z_0 = K_0 \left(1 - \frac{n}{s_n\, q} \right) . \tag{3.13}$$

Bemerkung

Wird für die Tilgungsdauer eine ganze Zahl von Jahren festgelegt, so entsteht in der Regel eine krumme Annuität.
Verlangt man umgekehrt für die Jahresleistung einen glatten Betrag, so kann eine gebrochene Tilgungsdauer entstehen. Die Berechnung dieser Tilgungsdauer geschieht dabei analog zu Satz 2.7 aus Abschnitt 2.4.:

$$t = \frac{\log A - \log T_1}{\log q} \tag{3.14}$$

Definition 3.5

Wird die erste Tilgungsrate durch einen Hundertsatz der Gesamtschuld ausgedrückt, so spricht man von *Prozentannuität*. Der Hundertsatz heißt *Tilgungsfuß* oder *Tilgungsquote*.

Satz 3.5

Ist K_0 die Gesamtschuld, i der vorgegebene Zinssatz, Q die Tilgungsquote und $i_T = \frac{Q}{100}$, so gilt für die (gebrochene) Laufzeit dieser Annuitätentilgung

$$t = \frac{\log\left(1 + \frac{i}{i_T}\right)}{\log(1+i)}. \tag{3.15}$$

Beispiel 3.2

Eine Hypothek über 230.000 € wird mit 7 % verzinst. Es soll pro Jahr 1 % plus ersparter Zinsen nachschüssig getilgt werden. Wann ist die Schuld abgetragen ?

$$K_0 = 230.000 \qquad i = 0,07 \qquad i_T = 0,01$$

$$t = \frac{\log(1 + \frac{0,07}{0,01})}{\log 1,07} = 30,73$$

Die Hypothek wird erst nach 31 Jahren getilgt sein. Die Annuität für die ersten 30 Jahre beträgt $A = 230.000 \cdot (0,07 + 0,01) = 18.400$. Das 31. Jahr ist gesondert abzurechnen.

Empfehlung

Tilgung und Stückelung	[Ka,Lo]	S. 79-82
	[Kö]	S. 126-135
	[Kos]	S. 120-128
Unterjährige Annuitätentilgung	[Kö]	S. 133-135
	[Bo]	S. 60-66

3.4. Tilgung mit Aufgeld

Definition 3.6

Ein zur Übernahme einer Schuld anregender Aufschlag wird *Aufgeld* oder *Agio* genannt.

Bemerkung

Das Aufgeld wird als fester Satz a bezogen auf 100 DM Tilgung ausgedrückt. Es ist mit zu tilgen, darf aber nicht verzinst werden, da der Gläubiger nur auf den Nominalbetrag der Schuld Zinsen erhält.

Satz 3.6

Wird eine Schuld K_0 nachschüssig n Jahre lang durch Ratentilgung mit Aufgeld abgetragen, so gilt für die Annuität

$$(3.16) \qquad A_j = \frac{K_0}{n}\left(1 + \frac{a}{100} + (n-j+1)\,i\right), \quad \text{j=1,...,n} .$$

Bemerkung

Bei Ratentilgung mit Aufgeld ist dem bisherigen Tilgungsplan nur eine Spalte für das Aufgeld hinzuzufügen. Die Annuität erhöht sich dabei um das Aufgeld.

Bei der Annuitätentilgung mit Aufgeld führt ein analoges Zufügen des Aufgeldes auch zu nichtkonstanten Annuitäten, da die Tilgungsraten T_j und damit auch die Aufgelder G_{aj} geometrisch wachsen.

Die Veränderung der Annuität entspricht aber nicht dem Sinn der Annuitätentilgung. Deshalb wird eine zusätzliche Variante betrachtet, bei der das Aufgeld in einer konstanten Annuität enthalten sein soll. Man spricht vom *eingeschlossenen* Aufgeld.

Satz 3.7

Wird eine Schuld K_0 nachschüssig n Jahre lang durch Annuitätentilgung mit Aufgeld abgetragen, so gilt für die Annuität bei nichteingeschlossenenem Aufgeld

$$(3.17) \qquad A_j = K_0\left((1+i)^n + \frac{a}{100}\,(1+i)^{j-1}\right)\frac{i}{(1+i)^n - 1}, \qquad \text{j=1,...,n}$$

und bei eingeschlossenem Aufgeld

$$(3.18) \qquad A = K_a\,(1+i_a)^n \frac{i_a}{(1+i_a)^n - 1}$$

$$\text{mit} \qquad K_a = K_0\left(1 + \frac{a}{100}\right) \qquad \text{und} \qquad i_a = \frac{i}{1 + \frac{a}{100}} .$$

Beispiel 3.3

Eine Schuld von 50.000 € soll in 4 Jahren bei einer Verzinsung von 8 % durch Annuitätentilgung abgezahlt werden. Dabei sei ein Agio von 10 % vereinbart.
Es sind Tilgungspläne für nichteingeschlossenes und eingeschlossenes Agio aufzustellen!

nichteingeschlossenes Aufgeld:

$$Z_1 = 50.000 \cdot 0,08 = 4.000 \qquad T_1 = 50.000 \cdot \frac{0,08}{1,08^4 - 1} = 11.096,04$$

$$A = 15.096,04$$

Tilgungsplan:

j	K_{j-1}	Z_j	T_j	G_{aj}	A_j
1	50.000,00	4.000,00	11.096,04	1.109,60	16.205,64
2	38.903,96	3.112,32	11.983,72	1.198.37	16.294,41
3	26.920,24	2.153,62	12.942,42	1.294,24	16.390,28
4	13.977,82	1.118,22	13.977,82	1.397,78	16.493,82
	0,00	10.384,16	50.000,01	4.999,99	65.384,15

eingeschlossenes Aufgeld:

$$a = 10 \qquad K_a = 50.000 \cdot 1,1 = 55.000 \qquad i_a = \frac{0,08}{1,1} = 0,0727273$$

$$A = 55.000 \cdot 1,0727273^4 \cdot \frac{0,0727273}{1,0727273^4 - 1} = 16.337,63$$

$$T_{a1} = 55.000 \cdot \frac{0,0727273}{1,0727273^4 - 1} = 12.337,63 \qquad Z_1 = 4.000$$

Tilgungsplan:

j	$K_{a,j-1}$	K_{j-1}	Z_{aj}	T_{aj}	T_j	G_{aj}
1	55.000,00	50.000,00	4.000,00	12.377,63	11.216,03	1.121,60
2	42.662,37	38.738,97	3.102,72	13.234,91	12.031.74	1.203,17
3	29.427,46	26.752,23	2.140,18	14.197,45	12.906,77	1.290,68
4	15.230,01	13.845,46	1.107,64	15.229,99	13.845,44	1.384,55
	0,02	0,02	10.350,54	54.999,98	49.999,98	5.000,00

Empfehlung

Kredite mit Auszahlungsgebühren [Bo] S. 74-75

3.5. Ratenkreditgeschäft

Bemerkung

Bei den üblichen Ratenkreditgeschäften beziehen sich die Rückzahlungsraten (d.h. Zins- und Tilgungsraten) in der Regel auf den Bruttoanfangskredit einschließlich Gebühren. Da die Zinsen nicht auf die Restschuld bezogen werden, ist somit der vorgegebenene nominelle Zinssatz für einen Vergleich wertlos.

Die Leistung des Gläubigers besteht in der Auszahlung des Nettokredits zum Zeitpunkt Null. Die Leistungen des Schuldners bestehen darin, daß monatlich Raten zurückgezahlt werden. Der unter Verwendung des Effektivzinssatz zu ermittelnde Barwert dieser Ratenzahlungen muß dann dem Nettokredit entsprechen, um dem Äquivalenzprinzip zu genügen.

Das Europäische Parlament hat 1997 in zweiter Lesung einem Vorschlag des Europäischen Rates zur Änderung der II. Verbraucherkreditrichtline (VKRL) zugestimmt. Damit haben alle EU-Mitgliedsstaaten nach einer Übergangsfrist den Effektivzins nach der ISMA-Methode zu berechnen, d.h. im unterjährigen Bereich wird auch von der exponentiellen Verzinsung ausgegangen.

Geplant war die einheitliche Verwendung der actual/365-Tagemethode. In Deutschland wird weiterhin mit gleichen Monatslängen aber auf Basis von 365 Tagen gearbeitet. Damit ist für das Ratenkreditgeschäft die 30,42/365-Tagemethode anzuwenden.

Bemerkung

In Deutschland wurde seit 1981 der effektive Jahreszins eines Ratenkredites nach der Preisangabenverordnung der Preisaufsichtsbehörden der Länder ermittelt. Dabei wurde die 30/360 Tage-Methode verwendet und die Zinssollstellungen ergab sich nach jeweils 360 Zinstagen bzw. zum Stichtag der letzten Monatsrate.

Vor dem Inkrafttreten dieser Preisangabenverordnung wurde der Effektivzinssatz nach der sogenannten *Uniformmethode* ermittelt. Dabei werden die gesamten Kreditkosten zu den durchschnittlich während der Laufzeit gebundenen Darlehensbetrag in Verhältnis gesetzt und dieser Wert auf ein Jahr bezogen.

Bezeichnungen:

K_0	Kredithöhe
$M = 12n + m_R$	Laufzeit des Kredites in Monaten; dabei ist n die Zahl der Jahre und m_R die Restlaufzeit in Monaten
i	nomineller Jahreszinssatz
$i_m = \frac{i}{12}$	relativer monatlicher Zinssatz
$\frac{g}{100}$	Beabeitungsgebühr in % bezogen auf K_0
r	monatlich konstante Rückzahlungsrate
i_{eff}	zu bestimmende effektive Jahreszinssatz

Satz 3.8

Bei einer Laufzeit von M Monaten, einem monatlichen Zinssatz i_m und einer Gebühr von g % für einen Ratenkredit der Höhe K_0 gilt für die konstante Rückzahlungsrate

$$r = \frac{K_0}{M}\left(1 + \frac{g}{100} + M i_m\right) . \tag{3.19}$$

Satz 3.9 (**EU-VKRL**)

Der effektive Zinssatz i_{eff} nach ISMA ist bei vorgegebener Laufzeit von M Monaten eine Lösung der Gleichung

$$\frac{(1+i_{eff})^{\frac{M}{12}} - 1}{(1+i_{eff})^{\frac{M}{12}} \cdot ((1+i_{eff})^{\frac{1}{12}} - 1)} = L \tag{3.20}$$

mit der Konstanten

$$L = \frac{K_0}{r} = \frac{M}{1 + \frac{g}{100} + M i_m} , \tag{3.21}$$

wobei $0 < L < M$ vorauszusetzen ist.

<u>Folgerung</u>

Unter Verwendung von $x = (1+i_{eff})^{\frac{1}{12}}$ erhält man aus (3.20) die Bestimmungsgleichungen

$$L\, x^{M+1} - (L+1)\, x^M + 1 = 0. \tag{3.22}$$

Beispiel 3.4

Prüfen Sie die folgenden Angaben der Sparkasse Freiberg!

Allzweckdarlehen (Konditionen vom 21.05.2001)

Monatszins: 0,44 %
Bearbeitungsgebühr: 2 %

Laufzeit 36 Monate: Kreditkosten 178,40 DM je 1.000,00 DM
Effektivzins 11,56 %

Laufzeit 60 Monate: Effektivzins 10,81 %

Beispiel 3.5

www.quelle.de/wwl/statisch/service/bezahlen/teilzahlung.html

Konditionen vom 25.03.2002 (Auszug) :

Bei 3 Monatsbeiträgen beträgt der Zinsaufschlag pro Monat 0,76 %. Dies entspricht einem effektiven Jahreszins (ohne Zahlpause) von 14,51 %.

Prüfen Sie diese Angabe!

Satz 3.10 **(PAngV alt)**

Der effektive Zinssatz i_{eff} nach der **PAngV alt** ist bei vorgegebener Laufzeit von n Jahren und m_R Monaten eine Lösung der Gleichung

$$(3.23) \qquad \frac{12 + 5,5\, i_{eff}}{(1+i_{eff})^n} \cdot \frac{(1+i_{eff})^n - 1}{i_{eff}} + \frac{\left(1 + \left(\frac{m_R - 1}{24}\right) i_{eff}\right) m_R}{\left(1 + \frac{m_R}{12}\, i_{eff}\right) (1+i_{eff})^n} = L$$

mit der Konstanten

$$(3.21) \qquad L = \frac{K_0}{r} = \frac{M}{1 + \frac{g}{100} + M i_m} \ ,$$

wobei $\min\{\frac{M-1}{2}; 5,5\} < L < M$ vorauszusetzen ist.

Folgerung

Beträgt die Laufzeit eines Kredites genau n Jahre, so erhält man unter Verwendung von $x = 1 + i_{eff}$ die Bestimmungsgleichungen

$$(3.24) \qquad (L - 5,5)\, x^{n+1} - (L + 6,5)\, x^n + 5,5x + 6,5 = 0$$

Folgerung

Beträgt die Laufzeit eines Kredites maximal 12 Monate, so erhält man den effektiven Zinssatz

$$(3.25) \qquad i_{eff} = 24\, \frac{M i_m + \frac{g}{100}}{M + 1 - (M-1)\left(M i_m + \frac{g}{100}\right)} \ .$$

Bemerkung

Vor dem Inkrafttreten der PAngV wurde der Effektivzinssatz nach der sogenannten *Uniformmethode* ermittelt. Dabei werden die gesamten Kreditkosten zu den durchschnittlich während der Laufzeit gebundenen Darlehensbetrag in Verhältnis gesetzt und dieser Wert auf ein Jahr bezogen. Damit erhält man

$$(3.26) \qquad i^u_{eff} = 24\, \frac{M i_m + \frac{g}{100}}{M + 1} \ .$$

Empfehlung

H. Bieg: Die Effektivverzinsung von Ratenkrediten
WiSt, 10(1993), S 525-529

Wimmer/Stöckl-Pukall: Neuregelung der Effektivinsberechnung
Die Bank, 1/98 , S. 33-37

Ratenkreditgeschäft (Uniformmethode) [Kö] S. 38-43