Zielscheiben auf dem Weihnachtsmarkt

nach einer Idee von Hennie ter Morsche (TU Eindhoven), Gerhard Woeginger (TU Eindhoven), Falk Ebert (HU Berlin)

mit Lösungen von Andreas Grieser (Greifswald), Hanspeter Indermaur (Degersheim, Schweiz) und Ingmar Rubin (Berlin)

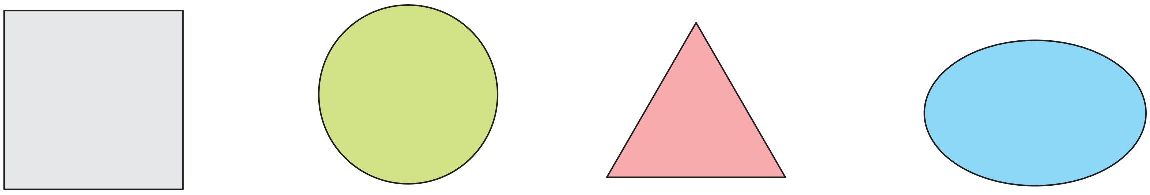

Abbildung 1: Zielscheiben auf dem Weihnachtsmarkt

Auf dem Berliner Weihnachtsmarkt befindet sich in diesem Jahr ein Stand an dem Bogenschützen ihr Können beweisen. Zur Auswahl stehen verschiedene Zielscheiben - siehe Abbildung 1. Zielscheibe eins ist ein Quadrat mit der Seitenlänge 10cm, Zielscheibe 2 ist ein Kreis mit dem Durchmesser 10cm, Zielscheibe 3 ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 10cm und Zielscheibe 4 ist eine Ellipse mit den Halbachse $a = 5$cm, $b = 4$cm. Wer die Zielscheibe trifft erhält einen Punkt. Wenn der Pfeil näher am Mittelpunkt als zum nächstgelegenen Rand der Scheibe auftrifft, erhält man einen zweiten Punkt. Beim Dreieck ist der Mittelpunkt der Umkreismittelpunkt.
Für welche der Scheiben sollte sich der Schütze entscheiden, d.h. bei welchen der Scheiben besteht die größte Wahrscheinlichkeit den Zusatzpunkt zu erhalten?

Lösung für den Kreis

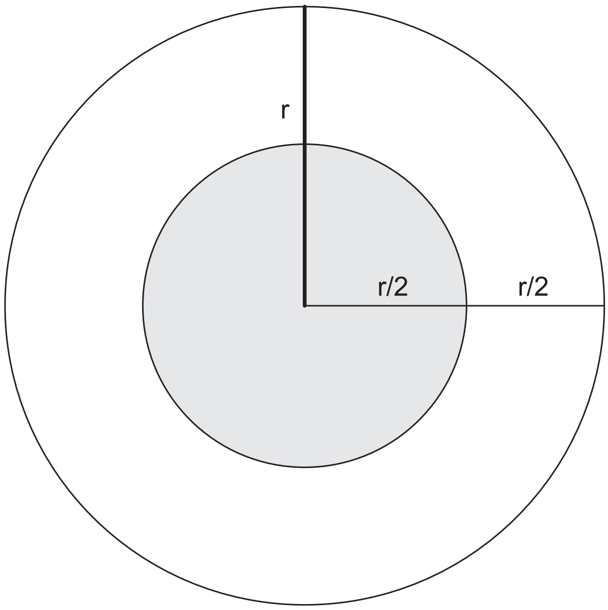

Abbildung 2: Kreiszielscheibe mit Grenzkurve

Es gibt genau einen, inneren Kreis der die Grenze zum Zusatzpunkt markiert. Dieser Kreis hat den Radius $r/2$. Alle Punkte innerhalb dieses Grenzkreises liegen näher am Mittelpunkt als zum äußeren Kreis mit Radius r. Die Wahrscheinlichkeit für den Zusatzpunkt erhalten wir dann aus dem Verhältnis der inneren Kreisfläche zur gesamten Kreisfläche:

$$w_k = \frac{\pi\,(r/2)^2}{\pi\,r^2} = \frac{1}{4} = 0.25 \tag{1}$$

Lösung für das Quadrat

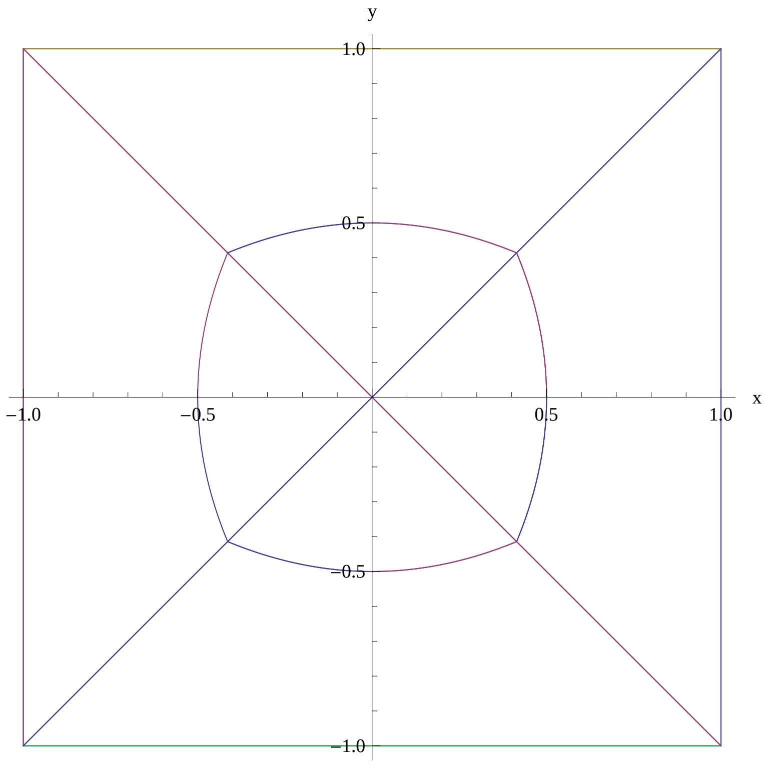

Abbildung 3: quadratische Zielscheibe mit Grenzkurve

Wir wollen nun die Kurve innerhalb des Quadrate herleiten auf der die Grenzbedingung $r = Min(x, y)$ erfüllt ist. Wir verschieben dazu die Mitte des Quadrates in den Ursprung eines zweidimensionalen, rechtwinkligen Koordinatensystems. Das Quadrat habe die Seitenlänge 2. Ein Punkt $P(x, y)$ liege im ersten Quadranten und erfülle die Grenzbedingung. Es muss dann gelten:

$$(1 - x) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \rightarrow \quad y = \pm\sqrt{1 - 2\,x} \tag{2}$$

Auf der Diagonalen $y = x$ erhalten wir den Punkt:

$$y = x = \pm\sqrt{1 - 2\,x} \quad \rightarrow \quad y_1 = x_1 = \sqrt{2} - 1 \approx 0.414214 \tag{3}$$

und auf der x-Achse ($y = 0$) ist $P(0.5, 0)$. Abbildung 2 zeigt das Oval innerhalb des Quadrates. Für alle Treffer innerhalb des Quadrates erhält Ruprecht den Zusatzpunkt. Wir berechnen jetzt die Fläche zwischen der x - Achse, der Diagonalen

$y = x$ und dem Bogen $y = \sqrt{1-2\,x}$

$$A_1 = \int\limits_{x=0}^{x_1} x\,\mathrm{dx} + \int\limits_{x=x_1}^{0.5} \sqrt{1-2\,x}\,\mathrm{dx} \tag{4}$$

$$A_1 = \frac{3}{2} - \sqrt{2} + \frac{3}{2} - \sqrt{2} = \frac{1}{6}\left(4\sqrt{2}-5\right) \tag{5}$$

$$w = \frac{8 \cdot A_1}{4} = \frac{1}{3}\left(4\sqrt{2}-5\right) \approx 0.218951 \tag{6}$$

Lösung für das gleichseitige Dreieck

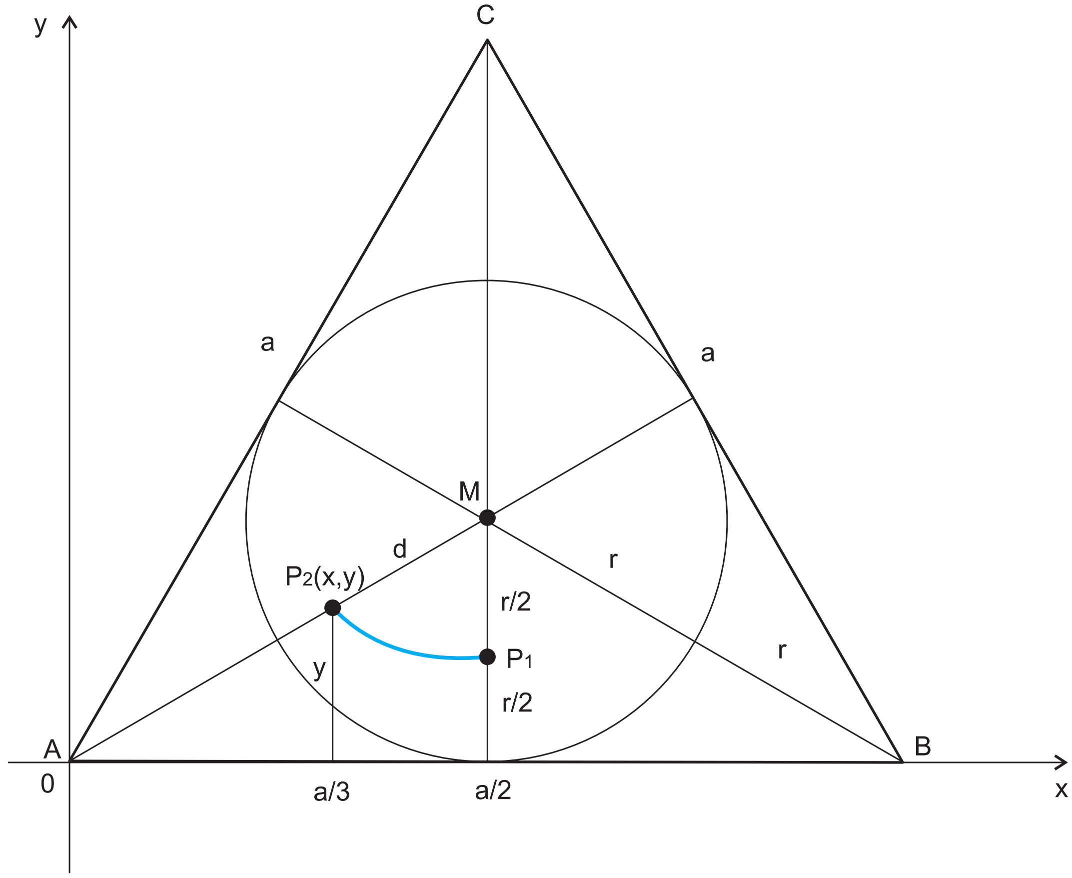

Abbildung 4: gleichseitiges Dreieck mit der Grenzkurve im unteren Sechstel

Analog wie beim Quadrat ermitteln wir die Grenzkurve im gleichseitigen Dreieck. Der Eckpunkt A vom Dreieck liege im Ursprung des Koordinatensystems. Sei a die Seitenlänge vom Dreieck. Wir erhalten dann:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad r = \frac{h}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}, \quad M\left(\frac{a}{2}, r\right) \tag{7}$$

Die blau markierte Grenzkurve verläuft von $P_1(a/2, r/2)$ zum Punkt P_2. Wir müssen nun für den Punkt P_2 die Koordinate ermitteln. Wir wissen P_2 liegt auf der Geraden

$$y = x \cdot \tan(30°) \tag{8}$$

Weiterhin muss der Abstand zum Mittelpunkt M gleich dem Abstand zum unteren Rand sein, was in Abbildung 2 genau der y-Koordinate des Punktes P_2 entspricht.

$$d = \sqrt{\left(\frac{a}{2} - x_2\right)^2 + (r - y_2)^2} = y_2 \tag{9}$$

$$y_2 = x_2 \cdot \tan(30°) \quad \rightarrow \quad x_2 = \frac{a}{3} \tag{10}$$

Die Kurve zwischen P_1 und P_2 erhalten wir dann aus:

$$d = \sqrt{\left(\frac{a}{2} - x\right)^2 + (r - y)^2} = y \;\rightarrow\; f(x) = \frac{a^2 - 3\,a\,x + 3\,x^2}{\sqrt{3}\,a} \tag{11}$$

Wir berechnen jetzt die Fläche zwischen der x-Achse, der Geraden $y = x \cdot \tan(30°)$ und dem Bogen $f(x)$

$$A_1 = \int\limits_{x=a/3}^{a/2} x\ \tan(30°) - \frac{a^2 - 3\,ax + 3\,x^2}{\sqrt{3}\,a}\,\mathrm{dx} = \frac{5\,a^2}{216\sqrt{3}} \tag{12}$$

Die Fläche zwischen der x-Achse und der Geraden $y = x \cdot \tan(30°)$ beträgt:

$$A_2 = \int\limits_{x=0}^{a/2} x\ \tan(30°)\,\mathrm{dx} = \frac{a^2}{8\sqrt{3}} \tag{13}$$

$$w = \frac{A_1}{A_2} = \frac{5}{27} \approx 0.185185 \tag{14}$$

Lösung für die Ellipse

Konstruktion in GeoGebra

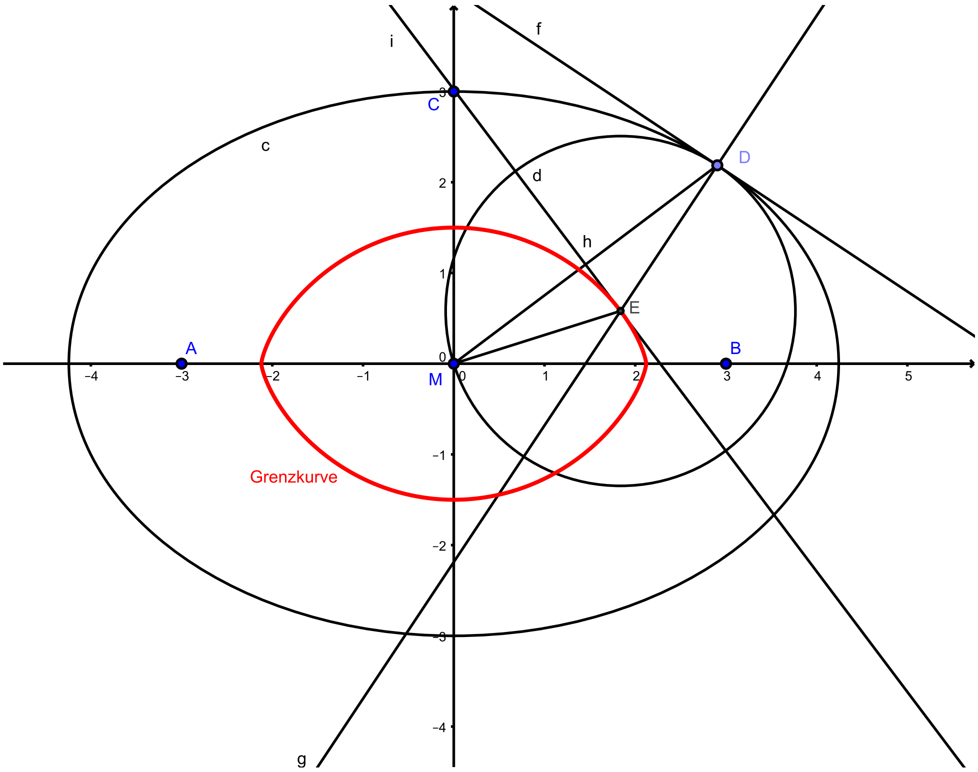

Abbildung 5: Konstruktion der Grenzkurve in GeoGebra

Wir konstruieren in Geogebra eine Ellipse aus zwei Brennpunkten A, B die symmetrisch zum Ursprung liegen und einem Punkt C der auf der y-Achse liegt. Der Mittelpunkt M der Ellipse liegt dann im Ursprung. Sei D ein Punkt auf der Ellipse mit den Koordinaten $D(x_0, y_0)$. Wir zeichnen nun die Strecke MD und bilden von ihr die Mittelsenkrechte. Im Punkt D konstruieren wir die Tangente an die Ellipse. Zur Tangente bilden wir in D die Senkrechte, d.h wir konstruieren die Normale in D. Der Schnittpunkt zwischen der Normalen und der Mittelsenkrechten von MD sei E. Wir schalten nun die Ortskurvenverfolgung von E ein und bewegen D auf der Ellipse. Die Ortskurve von E ist die gesuchte Grenzkurve d.h es gilt für alle Punkte E stets $\mid EM \mid = \mid ED \mid$. Zur Kontrolle ist in Abbildung 2 der Kreis um E mit Radius ED eingezeichnet. Weiterhin ist EM die kürzeste Verbindung zum Ursprung und die kürzeste Verbindung zum Ellipsenrand.

Ab einem bestimmten Verhältnis $a : b$ kommt es zur Selbstüberschneidung der Grenzkurve, wie das folgende Bild zeigt. Bei der Herleitung der Kurvengleichung kann das Verhältnis exakt bestimmt werden bis zu der man eine geschlossene, konvexe Kurve erhält.

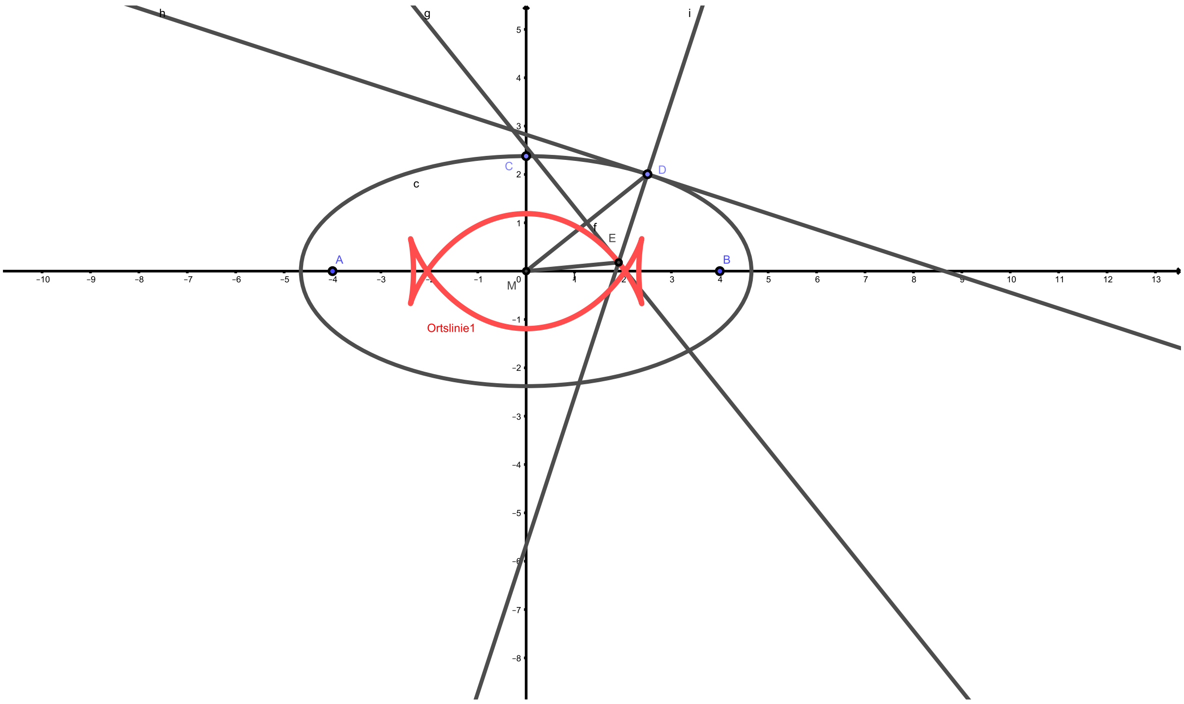

Abbildung 6: Selbstüberschneidung der Grenzkurve

Herleitung der Kurvengleichung für die Ortskurve

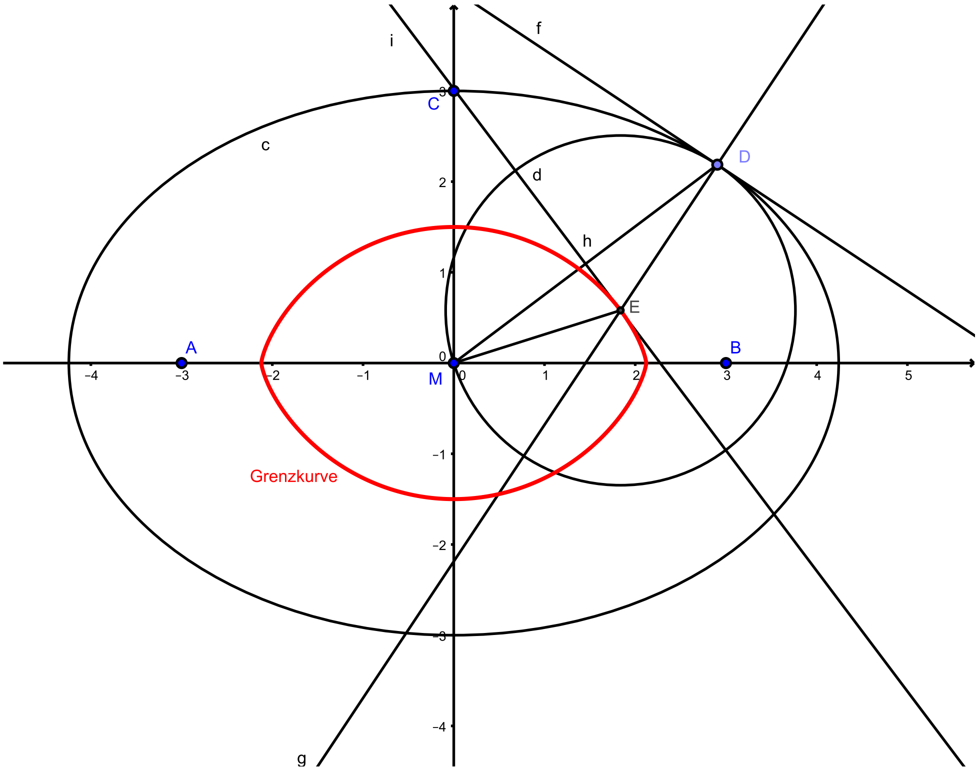

Abbildung 7: Konstruktion der Grenzkurve

Sei $D(x_0, y_0)$ ein Punkt auf der Ellipse mit den Halbachsen a, b und dem Mittelpunkt M im Ursprung. Wir bestimmen nun die Geradengleichung der Mittelsenkrechten auf der Verbindung M, D. Die Gerade durch M, D hat den Anstieg:

$$m_1 = \frac{y_0}{x_0} \tag{15}$$

und ihre Mittelsenkrechte den Anstieg:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{x_0}{y_0} \tag{16}$$

Die Mittelsenkrechte geht durch den Mittelpunkt der Strecke MD:

$$\frac{y_0}{2} = m_2 \cdot \frac{x_0}{2} + n \quad \rightarrow \quad n = \frac{y_0}{2} - m_2 \cdot \frac{x_0}{2} \tag{17}$$

$$\text{Mittelsenkrechte:} \quad y = m_2 \cdot x + n \tag{18}$$

$$\text{Mittelsenkrechte:} \quad y = -\frac{x_0}{y_0} \cdot x + \frac{y_0}{2} - m_2 \cdot \frac{x_0}{2} \tag{19}$$

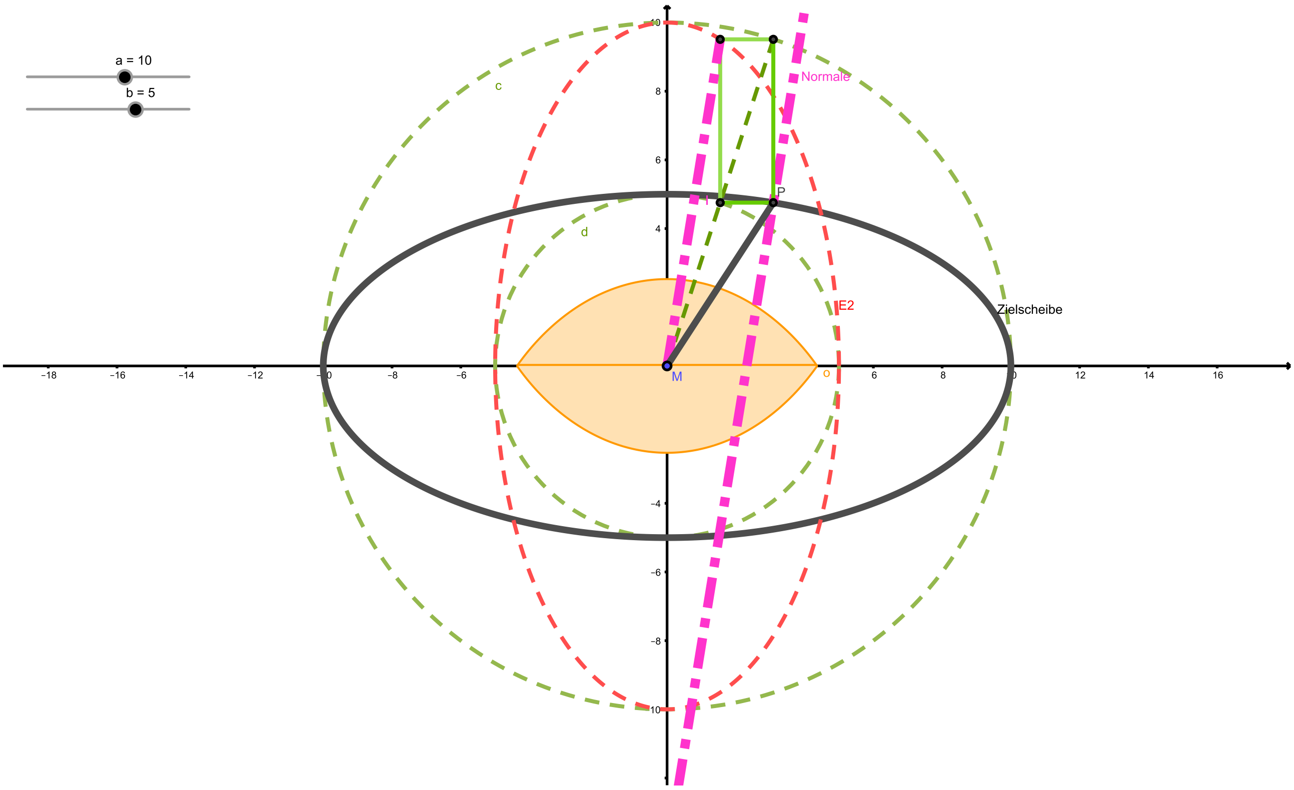

Abbildung 8: Ellipsenkonstruktion und Herleitung der Ortskurve

Die Gleichung der Normalen im Ellipsenpunkt D lautet

$$y - y_0 = \frac{a^2\, y_0}{b^2\, x_0} \cdot (x - x_0) \tag{20}$$

In Mathematica berechnen wir nun den Schnittpunkt E der Mittelsenkrechten mit der Normalen und erhalten:

$$x_g = \frac{x_0\,(2a^2\, {y_0}^2 + b^2\,({x_0}^2 - {y_0}^2))}{2\,(a^2\, {y_0}^2 + b^2\, {x_0}^2)} \tag{21}$$

$$y_g = \frac{y_0\,(a^2\,({y_0}^2 - {x_0}^2) + 2b^2\, {x_0}^2)}{2\,(a^2\, {y_0}^2 + b^2\, {x_0}^2)} \tag{22}$$

An Stelle von x_0, y_0 schreiben wir die Parameterdarstellung der Ellipse:

$$x_0(t) = a\, \cos(t), \quad y_0(t) = b\, \sin(t) \tag{23}$$

und erhalten somit die Parameterdarstellung der gesuchten Grenzkurve:

$$x_g(t) = \frac{\cos(t)\left((2a^2 - b^2)\sin^2(t) + a^2\cos^2(t)\right)}{2a} \tag{24}$$

$$y_g(t) = \frac{\sin(t)\left(b^2\sin^2(t) - (a^2 - 2b^2)\cos^2(t)\right)}{2b} \tag{25}$$

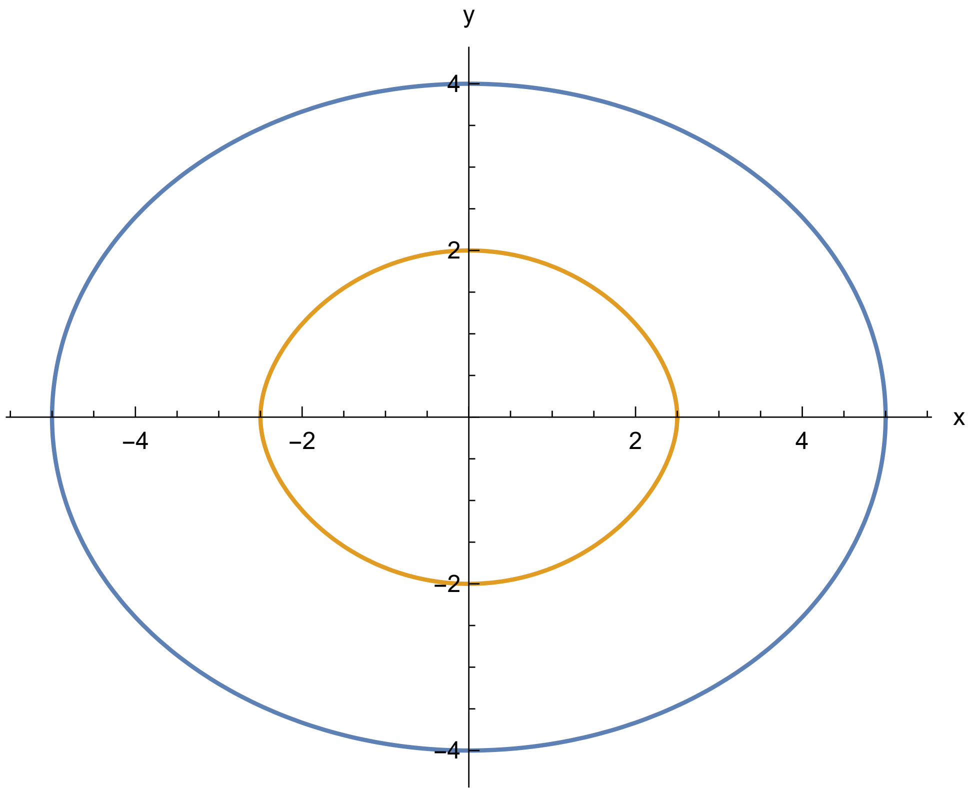

Abbildung 9: Grenzkurve innerhalb der Ellipse, $a = 5$, $b = 4$

Die Fläche innerhalb der Grenzkurve kann mit der Leibnizschen Sektorenformel berechnet werden.

$$A = \frac{1}{2} \cdot \int\limits_{t=0}^{2\pi} (x_g \cdot \dot{y_g} - \dot{x_g} \cdot y_g)\,\mathrm{dt} \tag{26}$$

$$A = \frac{3119t}{1280} - \frac{369}{640}\sin(2t) - \frac{243\sin(4t)}{5120} = \frac{3119\pi}{640} \tag{27}$$

Aus dem Verhältnis der inneren Fläche zur Gesamtfläche der Ellipse erhalten wir die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$A_{ellipse} = \pi\, a\, b = 20\,\pi, \quad w = \frac{A}{A_{ellipse}} = \frac{3119}{12800} \approx 0.243672 \tag{28}$$

Der Kreis mit $w = 0.25$ wäre die optimale Lösung bei der Auswahl der Zielscheiben, gefolgt von der Ellipse mit $w = 0.243672$.

Selbstüberschneidung der Grenzkurve

Die Gleichung y_g hat in Abhängigkeit vom Verhältnis $a : b$ eine Nullstelle oder drei Nullstellen:

$$y_g = \frac{y_0\,(a^2\,(\,{y_0}^2 - \,{x_0}^2) + 2b^2\,{x_0}^2)}{2\,(a^2\,{y_0}^2 + b^2\,{x_0}^2)} = 0 \tag{29}$$

$$y_{01} = 0, \quad y_{02} = -\frac{x_0\sqrt{a^2 - 2b^2}}{a}, \quad y_{03} = \frac{x_0\sqrt{a^2 - 2b^2}}{a} \tag{30}$$

$$\text{drei reelle Nullstellen für :} \quad a^2 \geq 2\,b^2 \quad \frac{a}{b} \geq \sqrt{2} \tag{31}$$

Sobald drei reelle Nullstellen auftreten, kommt es zur Selbstüberschneidung der Kurve. Das kritische Verhältnis $a : b$ beträgt also $\sqrt{2} = 1.41421$. Alle Verhältnisse größer $\sqrt{2}$ führen zur Selbstüberschneidung symmetrisch zur x-Achse. Das zufällig gewählte Beispiel $a = 1/2, b = 7/20$ führt auf $k = 1.428571$, liegt also schon knapp über $\sqrt{2}$.

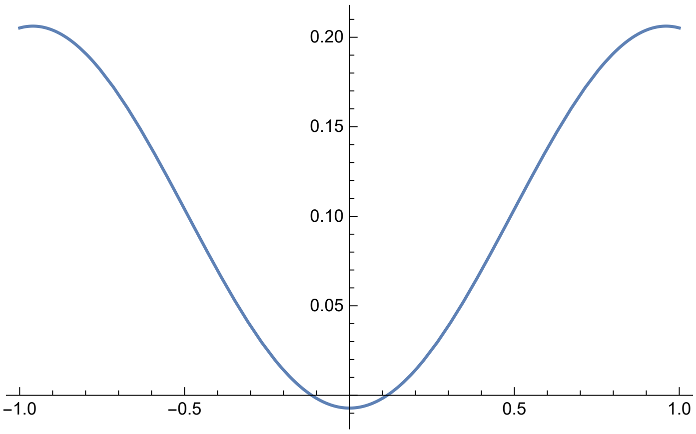

Abbildung 10: Verlauf $y_g(t)$ für $a = 1/2, b = 7/20, k = 1.428571$