

S-Bahnfahrt

von Ingmar Rubin

23. September 2002

Fahren Sie täglich mit der S-Bahn oder einem anderen Nahverkehrsmittel zur Arbeit ? Wenn ja dürfte Ihnen die Lösung des folgenden Problems leicht fallen. Autofahrer sind hier - zugegeben - etwas benachteiligt.

Herr K. wohnt in der City von Berlin, etwa in der Mitte zwischen den S-

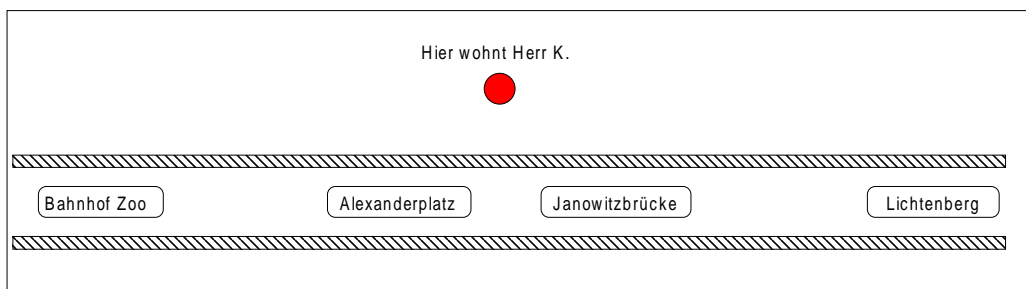


Abbildung 1: Skizze zur S-Bahnfahrt

Herr K. betreut zwei Versicherungsagenturen. Eine Agentur liegt im Ostteil der Stadt, am Bahnhof Lichtenberg. Die andere Arbeitsstelle befindet sich am S-Bahnhof Zoologischer Garten, im Westteil der Stadt. Über beide Agenturen werden etwa gleich viele Kunden betreut. Es genügt daher, das er im Monatsmittel beide Arbeitsstätten gleich häufig aufsucht.

Normalerweise fährt Herr K. mit dem Auto zu Arbeit. Das anhaltend schlechte Wetter und die permanenten Staus im Berufsverkehr haben ihn erwogen, ab Februar mit der S-Bahn zu fahren.

Herr K. ist immer in Eile und möchte nicht lange warten. Wenn er den S-Bahnsteig Alexanderplatz betritt nimmt er stets den zuerst einfahrenden Zug. Er weiß das alle Züge in Richtung Osten über Lichtenberg fahren und alle Züge in Richtung Westen am Bahnhof Zoo halten. Weiterhin verkehren die Züge in beiden Richtungen im regelmäßigen Abstand von 10 Minuten. Herr K. denkt mit diesem Zufallsprinzip keine der beiden Agenturen zu vernachlässigen.

Nach zwei Wochen muß Herr K. feststellen, das er in Lichtenberg vier mal häufiger war als am Bahnhof Zoo. Herr K. zweifelt nun am Zufall der Ereignisse und befragt seinen Kollegen D., einem passionierten Freizeitmathematiker.

Nach einiger Überlegung erkundigt sich Herr D. nach der Fahrzeit zwischen den Bahnhöfen Alexanderplatz und Janowitzbrücke. Er rät Herrn K. daraufhin jeden Tag den Abfahrtsbahnhof zu wechseln, also:

Montag Alexanderplatz
Dienstag Janowitzbruecke
Mittwoch Alexanderplatz
Donnerstag Janowitzbruecke
usw.

Da Herr K. in der Mitte zwischen den beiden S-Bahnhöfen wohnt, bleibt der Fußweg jeden Morgen der Gleiche und so nimmt er den Ratschlag seines Kollegen D. an.

Seitdem funtioniert das Zufallsprinzip von Herrn K. erstaunlich gut.

Haben Sie eine Erklärung dafür, warum Herr K. jeden Tag den Abfahrtsbahnhof wechseln soll ?

Können Sie die Fahrzeit zwischen den Stationen Alexanderplatz und Janowitzbrücke bestimmen ?

Punktezahl=10

Alltagserfahrung

Angenommen sie sind im Berufsverkehr unterwegs und müssen auf einem Bahnsteig umsteigen. Der Zeitpunkt wann sie den Bahnsteig erreichen, sei durch eine Reihe von Zufallsfaktoren auf dem Intervall $[0, 10]$ *min* gleichmäßig verteilt. In ihre gewünschte Richtung fahren zwei Züge recht dicht nacheinander, z.B. nach folgenden Fahrplan:

```
Ahrensfelde 09,
Wartenberg 10,
Ahrensfelde 19,
Wartenberg 20,
Ahrensfelde 29,
Wartenberg 30
usw.
```

Da sie schnell nach Hause möchten, werden sie immer den zuerst einfahrenden Zug nehmen. Das wird mit $9/10$ Wahrscheinlichkeit der Zug in Richtung Ahrensfelde sein. Den Wartenberger Zug werden sie nur in einem von 10 Fahrten erreichen.

Zweirichtungsverkehr

Bei Herrn K., verhält es sich nun ähnlich, nur das die Züge in entgegengesetzter Richtung fahren. Der Fahrplan auf dem S-Bahnhof Alexanderplatz sieht wie folgt aus:

S-Bahnhof Alexanderplatz

```
Richtung Lichtenberg      08
Richtung Zoologischer Garten 10
Richtung Lichtenberg      18
Richtung Zoologischer Garten 20
Richtung Lichtenberg      28
Richtung Zoologischer Garten 30
Richtung Lichtenberg      38
Richtung Zoologischer Garten 40
usw.
```

Jeder Zug verkehrt im 10 Minuten Abstand in seine Richtung. Der zeitliche Versatz zwischen den Abfahrtszeiten bewirkt bei zufälligen Betreten des Bahnsteigs, das Herr K. vier mal häufiger in Richtung Lichtenberg fährt. In einem Zeitintervall zwischen $[0 \dots 10]$ *min* beträgt die Wahrscheinlichkeit, das der Zug nach Lichtenberg zuerst einfährt:

$$W_L = \frac{8 \text{ min}}{10 \text{ min}} = \frac{4}{5} \quad (1)$$

Die Wahrscheinlichkeit, das der Zug nach Zoologischer Garten zuerst eintrifft beträgt dagegen nur:

$$W_Z = \frac{2 \text{ min}}{10 \text{ min}} = \frac{1}{5} \quad (2)$$

Um in beide Richtungen gleichmäßig viel zu fahren, müßte der Fahrplan so aussehen:

S-Bahnhof Alexanderplatz	
Richtung Lichtenberg	05
Richtung Zoologischer Garten	10
Richtung Lichtenberg	15
Richtung Zoologischer Garten	20
Richtung Lichtenberg	25
Richtung Zoologischer Garten	30
usw.	

Fahrzeit Alexanderplatz Janowitzbrücke

Herr D. hatte schnell erkannt, das die Züge nicht im gleichmäßigen Versatz verkehren. Betrachten wir nun den Fahrplan am S-Bahnhof Janowitzbrücke. Bei einer Fahrzeit von t Minuten verschieben sich die Abfahrtszeiten gegenüber Alexanderplatz wie folgt:

S-Bahnhof Janowitzbruecke	
Richtung Lichtenberg	08+t
Richtung Zoologischer Garten	10-t
Richtung Lichtenberg	18+t
Richtung Zoologischer Garten	20-t
Richtung Lichtenberg	28+t
Richtung Zoologischer Garten	30-t
usw.	

Herr D. gibt als Ratschlag jeden Tag zwischen den Abfahrtsbahnhöfen zu wechseln. Um im Monatsmittel gleich häufig in beide Richtungen zu fahren, muß die Wahrscheinlichkeit in Richtung Zoologischer Garten hier vier mal höher liegen. Für $t = 2 \text{ min}$ erhalten wir den folgenden Fahrplan :

S-Bahnhof Janowitzbruecke, t= 2 min

Richtung Zoologischer Garten	08
Richtung Lichtenberg	10
Richtung Zoologischer Garten	18
Richtung Lichtenberg	20
Richtung Zoologischer Garten	28
Richtung Lichtenberg	30
Richtung Zoologischer Garten	38
Richtung Lichtenberg	40
usw.	

Eine Fahrzeit $t \neq 2 \text{ min}$ würde das Gleichgewicht stören. Als Gegenbeispiel nehmen wir $t = 3 \text{ min}$ an:

S-Bahnhof Janowitzbruecke, $t = 3 \text{ min}$

Richtung Lichtenberg	01
Richtung Zoologischer Garten	07
Richtung Lichtenberg	11
Richtung Zoologischer Garten	17
Richtung Lichtenberg	21
Richtung Zoologischer Garten	27
Richtung Lichtenberg	31
Richtung Zoologischer Garten	37
usw.	

Die Wahrscheinlichkeit, das der zuerst einfahrende Zug in Richtung Lichtenberg fährt, beträgt:

$$W_L = \frac{4 \text{ min}}{10 \text{ min}} = \frac{2}{5} \quad (3)$$

Die Wahrscheinlichkeit, das der zuerst einfahrende Zug in Richtung Zoologischer Garten geht, beträgt:

$$W_Z = \frac{6 \text{ min}}{10 \text{ min}} = \frac{3}{5} \quad (4)$$

Bei einem täglichen Wechsel zwischen Alexanderplatz und Janowitzbrücke ergibt sich folgende Monatsstatistik (20 Werktage angenommen):

10 Fahrten von Alexanderplatz	->	10 x 4/5 = 8 Fahrten Richtung L.
		10 x 1/5 = 2 Fahrten Richtung Z.
10 Fahrten von Janowitzbruecke	->	10 x 2/5 = 4 Fahrten Richtung L.
		10 x 3/5 = 6 Fahrten Richtung Z.

Summe		12 Fahrten Richtung L.
		8 Fahrten Richtung Z.

Fahrzeiten $t < 2 \text{ min}$ würden das Verhältnis zugunsten der Lichtenberger Agentur noch verstärken. Für $t = 1 \text{ min}$ Fahrzeitdifferenz ergibt sich:

S-Bahnhof Janowitzbruecke, $t = 1 \text{ min}$

Richtung Zoologischer Garten	09
Richtung Lichtenberg	09
Richtung Zoologischer Garten	19
Richtung Lichtenberg	19
Richtung Zoologischer Garten	29

Richtung Lichtenberg	29
Richtung Zoologischer Garten	39
Richtung Lichtenberg	39
Richtung Zoologischer Garten	49
Richtung Lichtenberg	49
usw.	

Monatsstatistik:

10 Fahrten von Alexanderplatz -> $10 \times \frac{4}{5} = 8$ Fahrten Richtung L.
 $10 \times \frac{1}{5} = 2$ Fahrten Richtung Z.

10 Fahrten von Janowitzbruecke -> $10 \times \frac{1}{2} = 5$ Fahrten Richtung L.
 $10 \times \frac{1}{2} = 5$ Fahrten Richtung Z.

Summe -----
13 Fahrten Richtung L.
7 Fahrten Richtung Z.
