Das Problem vom Kantenläuferkäfer SCARABAEUS KARTESIAS

Ingmar Rubin, Berlin

Gegeben sei das Gittermodell eines regelmäßigen Würfels mit den Knotenpunkten $K_1 \ldots K_8$, so wie in Abbildung 1 gezeigt.
Im Punkt K_1 sitzt ein Käfer der über das Gerüst zum Knoten K_7 gelangen will. An jedem Knoten den er auf seinem Weg überquert, entscheidet er per Zufall welche Kante er als nächsten Wegabschnitt wählt. Im Startmoment (Position K_1) hat er drei Möglichkeiten , an jeden weiteren Knoten jeweils zwei Richtungen. Es sei vereinbart, das der Käfer nicht in die gleiche Richtung läuft, aus der er kam.
Wenn der Versuch *Käfer wandert von* K_1 *nach* K_7 durchgeführt wird, und bei jedem Versuch die Zahl der Kanten bis zum Zielknoten registriert wird, so kann für eine große Anzahl von Versuchen daraus die durchschnittliche Kantenzahl bestimmt werden, die der Käfer vom Start - bis zum Zielknoten benötigt.

1. Schreibe ein kleines PC-Programm (BASIC, PASCAL, C o.ä.), welches den Versuch *Käfer läuft von* K_1 *nach* K_7 simuliert. Ermittle daraus die durchschnittliche Kantenzahl.

2. Erzeuge mit dem PC-Programm eine Tabelle, welche die Anzahl an Möglichkeiten registriert *Käfer läuft genau über n-Kanten zum Ziel*.

3. Versuche aus der Tabelle eine Gesetzmäßigkeit (Folge) abzuleiten, welche die Zahl der Möglichkeiten in Abhängigkeit von n wiederspiegelt.

4. Berechne mit Hilfe der Folge und den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung die duchschnittliche Kantenzahl ! Punktezahl=12

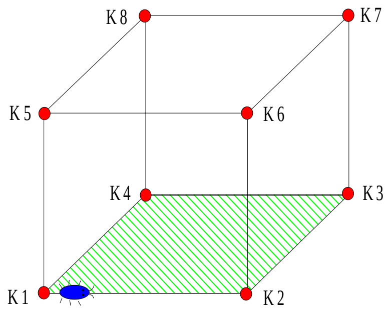

Abbildung 1: Gittermodell des regelmäßigen Würfels

1 Originallösung vom Author

1.1 Computersimulation

Zur Lösung des Problems ist es günstig, sich an Stelle des Würfel einen planaren Graphen G vorzustellen, wie in Abbildung 2 dargestellt.

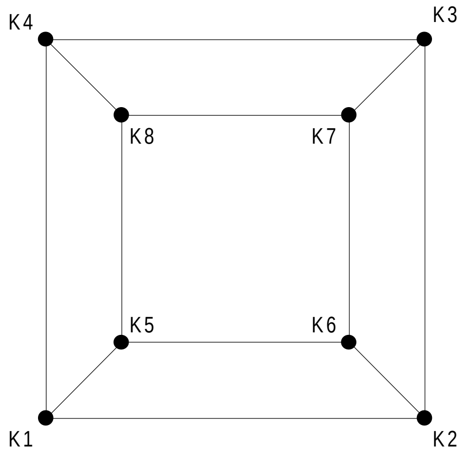

Abbildung 2: planarer Graph G des Würfelgitters

Der Graph G korrespondiert mit einer Knoten-Zweiginzidenzmatrix $M[i,j]$. Besteht zwischen den Knoten K_i und dem Knoten K_j eine Verbindung , so steht an der betreffenden Position von M eine 1, d.h. $M[i,j] = 1$, andernfalls beträgt $M[i,j] = 0$.

$$M[i,j] = \begin{bmatrix} & K_1 & K_2 & K_3 & K_4 & K_5 & K_6 & K_7 & K_8 \\ K_1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ K_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ K_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ K_4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ K_5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ K_6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ K_7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ K_8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Mit Hilfe der Matrix M kann ein Algorithmus geschrieben werden, der den Versuch "Käfer läuft von K_1 nach K_7 " in kurzer Zeit mehrere tausend mal simuliert. Registriert man bei jeden Versuch die Zahl der durchlaufenen Kanten k, und summiert sie auf, kann am Ende aus dem Quotienten

$$kd = \frac{\sum\limits_{i=1}^{z} k_i}{z} \tag{2}$$

die durchschnittliche Kantenzahl kd berechnet werden. Die Simulation am PC ergab für den Weg von K_1 nach K_7 eine mittlere Kantenzahl von $kd = 6$.

1.2 Lösungsweg über Differenzenschema

Im folgenden wird ein Weg von K_1 nach K_7 als Pfad P bezeichnet. Auf dem Graphen G des Würfels gibt es nur Pfade mit ungerader Kantenzahl $k \geq 3$, um von K_1 nach K_7 zu gelangen. Die Funktion $P(k)$ soll die Zahl aller möglichen Pfade angeben, um genau über k-Kanten zum Ziel zu gelangen.

$$P(k), \quad k = 2 \cdot i + 3, \quad i = 0 \ldots n \tag{3}$$

Für die Kantenzahl $k = 3$ und $k = 5$ läßt sich $P(k)$ durch folgende überlegung ermitteln: am Knoten K_1 gibt es genau 3 Verzweigungsmöglichkeiten. An den folgenden Knoten K_2, K_4 oder K_5 gibt es je 2 Verzweigungen, um an das Ziel über 3 bzw. 5 Kanten zu gelangen, d.h. $P(3) = 2 \cdot 3 = 6, \quad P(5) = 2 \cdot 3 = 6$.

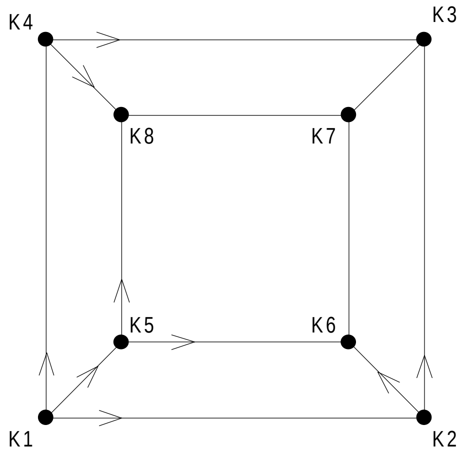

Abbildung 3: Verzweigungen für die Pfade $P(3)$ und $P(5)$

Die Zahl der Pfade mit mehr als 5 Kanten, also $P(7)$, $P(9)$, $P(11)$ ist durch reine überlegung nur schwer zu ermitteln. Die Zahl der Verzweigungen nimmt rasch zu. Insbesondere ist es möglich, das der Käfer beliebig oft den äußeren Kreis K_1, K_2, K_3, K_4 durchläuft. Es wurde deshalb der folgende Lösungsweg eingeschlagen:
Zunächst werden per Computersimulation die ersten Glieder der Folge $P(k)$ ermittelt. Aus diesem Zahlenmaterial wird dann über ein Differenzenschema das allgemeine Bildungsgesetz der Folge $P(k)$ abgeleitet.
Um einen Pfad der Kantenlänge k zu durchlaufen, beträgt die Wahrscheinlichkeit:

$$w(k) = \frac{1}{3 \cdot 2^{k-1}}, \quad k = 2 \cdot i + 3, \quad i = 0 \ldots n \tag{4}$$

Die Funktion $w(k)$ folgt unmittelbar aus dem Bild 3. Am Knoten K_1 gibt es genau 3 Verzweigungsmöglichkeiten.
An jedem weiteren Knoten kommen zwei Möglichkeiten hinzu. Das Produkt aus $P(k)$ und $w(k)$ ergibt den Erwartungswert für das Ereignis, daß bei einen Versuch genau ein Pfad P mit der Länge von k Kanten durchschritten wird.

$$EW(k) = w(k) \cdot P(k) \tag{5}$$

Die gesuchte durchschnittliche Kantenzahl kd berechnet sich aus der Summe der einzelnen Erwartungswerte multipliziert mit der zugehörigen Kantenzahl k :

$$kd = \sum_{k=2\cdot i+3}^{\infty} k \cdot w(k) \cdot P(k) \tag{6}$$

Mit einer Computersimulation können die einzelnen Erwartungswerte annähernd bestimmt werden. Für jeden Pfad der Länge k wird ein Zähler $Q(k)$ verwaltet. Wird bei dem Versuch die Kantenzahl k registriert, so wird der betreffende Zähler $Q(k)$ um 1 erhöht. Tabelle 1 zeigt für über 2 Mrd. Versuche das Ergebnis der Simulation. Der Erwartungswert für einen Pfad mit k-Kanten berechnet sich aus dem Quotienten:

$$EW(k) = \frac{Q(k)}{z} \tag{7}$$

z Zahl aller Versuche

$Q(k)$ Zahl der Versuche über k Kanten

$$P(k) = \frac{EW(k)}{w(k)} = \frac{Q(k) \cdot 3 \cdot 2^{k-1}}{z} \tag{8}$$

i	$k = 2 \cdot i + 3$	$Q(k)$	$P(k) = Q(k) \cdot 3 \cdot 2^{k-1}/z$
0	3	1073735191	6.00
1	5	268463936	6.00
2	7	335542955	30.00
3	9	150973487	53.99
4	11	121630614	173.99
5	13	68162775	390.03
6	15	47448111	1086.00
7	17	28906886	2646.5
8	19	19096000	6993.16
9	21	11989921	17563.36

Tabelle 1: Ergebnisse der Computersimulation für z = 2147483645 Versuche

Betrachtet man die Folge $P(k)$ etwas näher, erkennt man das alle Glieder ganzzahlig durch 6 teilbar sind. Um ein Bildungsgesetz für $P(k)$ abzuleiten, wird folgendes Differenzenschema aufgestellt:

i	$P(k)$	$P(k)/6$	d^1	d^2	d^3	d^4
0	6	1				
1	6	1	0			
2	30	5	4			
3	54	9	4	0		
4	174	29	20	16		
5	390	65	36	16	0	
6	1086	181	116	80	64	
7	2646	441	260	144	64	0
8	6990	1165	724	464	320	256
9	17574	2929	1764	1040	576	256

Tabelle 2: Differenzenschema zur Folge $P(k)$

Man erkennt das in bestimmten Zeilen i die Differenz d^k genau der Potenz 4^k entspricht. Daraus kann ein Algorithmus zum Aufbau des Differenzenschemas abgeleitet werden. Man gibt eine feste Zahl i_{max} vor. Daraus berechnet man $k_{max} = i_{max} \quad div \quad 2$. Für die Differenz in der k-ten Spalte und i-ten Zeile gilt folgende Bildungsvorschrift:

$$d_i^k = 0 \quad wenn \quad k > i\, div\, 2 \tag{9}$$
$$d_i^k = 4^k \quad wenn \quad k = i\, div\, 2 \tag{10}$$
$$d_i^k = d_{i-1}^k + d_i^k \quad wenn \quad k < i\, div\, 2 \tag{11}$$

Computeralgorithmus: Berechnung des Differenzenschemas $d[i,k]$

```
imax:=17;
kmax:=imax DIV 2
for k:= kmax downto 0 do
begin
    for i:=0 to imax do
    begin
        m := i DIV 2;
        if k > m then d[i,k]:= 0;
        if k = m then d[i,k]:= 4^k
        if k < m then d[i,k]:= d[i-1,k] + d[i,k+1];
    end; {i}
end; {j}
```

Die Differenzen in der Spalte $d[i,0]$ entsprechen genau der Folge $P(k)/6$.
Der Algorithmus wurde mit Hilfe eines Computers bis $i_{max} = 39$ berechnet. Aus Differenzenschema $d[i,k]$ kann die durchschnittliche Kantenzahl kd nach Gleichung (6), ermittelt werden. Tabelle 3 zeigt, das mit steigenden i_{max} der Wert für kd sich dem Grenzwert 6.0 nähert.

i_{max}	3	5	7	9	11	13	19	29	39
kd	3.85	4.89	5.45	5.73	5.87	5.94	5.9945	5.999910	5.999997

Tabelle 3: durchschnittliche Kantenzahl kd in Abhängigkeit von i_{max}

1.3 Algemeines Bildungsgesetz für die Folge $P(k)/6$

Aus der Computersimulation sind die ersten Glieder der Folge $P(k)/6$ bekannt (siehe Tabelle 2). Es wird nun ein allgemeines Bildungsgesetz für die Folge abgeleitet. Die Folgeglieder können als Summe von 4-er Potenzen dargestellt werden.

$a_0 = 1 = 1 \cdot 4^0$
$a_1 = 1 = 1 \cdot 4^0$
$a_2 = 5 = 1 \cdot 4^0 + 1 \cdot 4^1$
$a_3 = 9 = 1 \cdot 4^0 + 2 \cdot 4^1$
$a_4 = 29 = 1 \cdot 4^0 + 3 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^2$
$a_5 = 65 = 1 \cdot 4^0 + 4 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^2$
$a_6 = 181 = 1 \cdot 4^0 + 5 \cdot 4^1 + 6 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^3$
$a_7 = 441 = 1 \cdot 4^0 + 6 \cdot 4^1 + 10 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4^3$
$a_8 = 1165 = 1 \cdot 4^0 + 7 \cdot 4^1 + 15 \cdot 4^2 + 10 \cdot 4^3 + 1 \cdot 4^5$
$a_9 = 2929 = 1 \cdot 4^0 + 8 \cdot 4^1 + 21 \cdot 4^2 + 20 \cdot 4^3 + 5 \cdot 4^5$

Betrachtet man die Koeffizienten der 4-er Potenzen und vergleicht sie mit dem Pascalschen Dreieck (Zahlendreick das sich aus dem Binomialkoeffizienten berechnet), so erkennt man einen Zusammenhang. Die $n-te$, schräg stehende Spalte im Pascalschen Dreieck enthält genau die Koeffizienten vor der $4^n - ten$ Potenz. Vor den weiteren Betrachtungen seien zur Wiederholung kurz ein paar Gleichungen zum Binomialkoeffizienten eingeschoben:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \tag{12}$$

$$\binom{n}{k} = 0, \quad k > n \tag{13}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \tag{14}$$

$$\binom{n}{1} = n \tag{15}$$

Die Koeffizienten vor 4^0 betragen konstant 1, das entspricht dem Binomialkoeffizienten

$$\binom{i-0}{0} = 1 \tag{16}$$

für beliebiges i, siehe auch Gleichung(14).
Die Koeffizienten vor 4^1 entsprechen der Folge der Binomialkoeffizienten

$$\binom{i-1}{1} = i-1 \tag{17}$$

Die Koeffizienten vor 4^2 entsprechen der Folge der Binomialkoeffizienten:

$$\binom{i-2}{2} = i-1, \quad \binom{0}{2} = 0, \quad \binom{1}{2} = 0, \quad \binom{2}{2} = 1, \quad \binom{3}{2} = 3 \tag{18}$$

Für die Folge a_i kann ein allgemeines Bildungsgesetz formuliert werden:

$$a_i = \sum_{k=0}^{i} \binom{i-k}{k} \cdot 4^k \tag{19}$$

In der Summenformel findet Gleichung (13) Anwendung, d.h. sobald $k > i - k$ wird, beträgt der Binimialkoeffizient 0 .
Die Folge a_i entspricht nach dem Differenzenschema genau 1/6 der gesuchten Funktion $P(k)$. Aus den Eingangs beschriebenen Gleichungen (4) und (6) kann jetzt eine abschließende Summenformel für die gesuchte durchschnittliche Kantenzahl kd aufgestellt werden.

$$w(k) = \frac{1}{3 \cdot 2^{k-1}}, \quad k = 2 \cdot i + 3, \quad i = 0 \dots n \tag{20}$$

$$kd = \sum_{k=2 \cdot i+3}^{\infty} k \cdot w(k) \cdot P(k) \tag{21}$$

$$P(k) = 6 \cdot a_i \tag{22}$$

$$kd = \sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{(2 \cdot i + 3) \cdot 6 \cdot a_i}{3 \cdot 2^{(2 \cdot i + 3 - 1)}} \right] = \sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{(2 \cdot i + 3) \cdot a_i}{2 \cdot 2^{2 \cdot i}} \right] \tag{23}$$

$$kd = \sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{(2 \cdot i + 3) \cdot \sum_{k=0}^{i} \binom{i-k}{k} \cdot 4^k}{2 \cdot 2^{2 \cdot i}} \right] \tag{24}$$

Mit Hilfe eines Computer-Algebra Programms wie MATHEMATICA oder MAPLE V kann Gleichung (24) numerisch ausgewertet werden. Die unendliche Summe kovergiert gegen den Grenzwert $kd = 6$ wie in Tabelle 2 zu sehen ist.
Wer sich in der Umformung von Summen mit Binomialkoeffizienten auskennt, kann versuchen den Ausdruck (24) zu vereinfachen bzw. eine Formel für die endliche Summe bis $i = n$ zu finden.

1.4 Numerische Ergebnisse

Die Gleichungen 19 und 24 wurden mit Hilfe von MATHEMATICA numerisch ausgewertet. Das Programm kann für die Folge a_i eine geschlossene Summenformel ermitteln.

$$
\begin{aligned}
a[i] &= \sum_{k=0}^{i} \binom{i-k}{k} \cdot 4^k \\
a[n] &= (2i)^n \,\mathrm{ChebyshevU}\,[n, -\frac{i}{4}] + \frac{1}{\pi} \cdot (2^{2(1+n)} HypergeometricPFQ \\
&\quad [\{1+\frac{n}{2}, \frac{3}{2}+\frac{n}{2}\}, \{2+n\}, -16] \cdot (EulerGamma + \log[4] + \\
&\quad 2 \cdot \mathrm{PolyGamma}[0, -1-n] - \mathrm{PolyGamma}[0, 2+n]) \cdot \sin[n\pi])
\end{aligned}
$$

Die ersten 20 Glieder der Folgen $a_i, P(k)$ und kd lauten:

i	$k = 2 \cdot i + 3$	a_i	$P(k) = 6 \cdot a_i$	$kd(k)$
0	3	1	6	1.5
1	5	1	6	2.125
2	7	5	30	3.21875
3	9	9	54	3.8515625
4	11	29	174	4.474609375
5	13	65	390	4.88720703125
6	15	181	1086	5.2186279296875
7	17	441	2646	5.447418212890625
8	19	1165	6990	5.616294860839844
9	21	2929	17574	5.733613967895508
10	23	7589	45534	5.816844463348389
11	25	19305	115830	5.874377846717834
12	27	49661	297966	5.914338201284409
13	29	126881	761286	5.941752977669239
14	31	325525	1953150	5.960549442097545
15	33	833049	4998294	5.973350758198649
16	35	2135149	12810894	5.982050500228070
17	37	5467345	32804070	5.987937965459423
18	39	14007941	84047646	5.991912891673564
19	41	35877321	215263926	5.994588570809356
20	43	91909085	551454510	5.99638577356518

1.5 Literaturhinweise

/1/ `Licht, Christine: Ein Kaeferspaziergang auf Koerperkanten, Beitrag in Mathematikzeitschrift Die Wurzel Heft 3+4 / 2000`

/2/ `Stewart, Ian: Die Reise nach Pentagonien - 16 mathematische Kurzgeschichten, Spektrum Akademischer Verlag Berlin - Heidelberg-Oxford, 1995`

2 Lösungsweg von Dr. Klaus Nagel, München

Das Problem wird dadurch erschwert, daß der Käfer an einer Ecke nicht umdreht. Man umgeht das, wenn man zwei Schritte zusammenfaßt, außer wenn das Ziel erreicht wird. Dann kann der Scarabaeus nur am Start $S = (K_1)$, am Ziel $Z = (K_7)$, oder an einem *geraden* Zwischenpunkt $G = (K_3, K_6, K_8)$ sein. Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind :

$$
\begin{aligned}
P(S \to G) &= 1, \\
P(G \to S) &= \frac{1}{4} \\
P(G \to G) &= \frac{1}{4} \\
P(G \to Z) &= \frac{1}{2} \\
P(Z \to Z) &= 1
\end{aligned}
$$

Die Zahl der durchschrittenen Kanten bei n Doppelschritten beträgt $2 \cdot n - 1$. Bezeichnet man die Ecken mit den Zahlen von 0 (Start) bis 7 (Ziel), so kann man die 3 Bits als die Koordinaten der Eckpunkte auffassen. Bei einem Doppelschritt ändert sich die Zahl der Einsen um eine gerade Anzahl, außer beim letzten Doppelschritt der zum Ziel führt. Diese Darstellung erlaubt auch eine einfache Programmierung eines Schritts in C:

```
do {Ecke[n]=Ecke[n-1]^(1 << (random() % 3));} while (Ecke[n]!= Ecke[n-2]);
```

Vom Start(0) kommt der Käfer in einem Doppelschritt zu einer der Ecken 3, 5 oder 6, das sind Ecken mit genau zwei Einsen, die ich wegen der geraden Anzahl mit G bezeichnet habe. Von einer Ecke in G gelangt der Käfer unabhängig von der Vorgeschichte in:

- 1/2 der Fälle zum Ziel
- 1/4 der Fälle zum Start
- 1/4 der Fälle zu einer anderen Ecke in G

Ist der Käfer einmal im Ziel, bleibt er auch dort. Für die Untersuchung interessiert nur in welchem Zustand $Z_1 = Start$, $Z_2 = G$, $Z_3 = Ziel$ der Käfer ist. In G spielt es keine Rolle, in welchem der drei möglichen Eckpunkte er ist.

$a(i, j)$ sei die Wahrscheinlichkeit, daß der Zustand Z_j in einem Doppelschritt in den Zustand Z_i wechselt. Der Vektor $P = (s_i, g_i, z_i)$ beschreibt die Anteile der drei Zustände, $s_i + g_i + z_i = 1$. Insbesondere haben wir den Anfangszustand $P(0) = (1, 0, 0)$ d.h. alles im Startzustand. Mit der Matrix

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a(1,1) & a(1,2) & a(1,3) \\ a(2,1) & a(2,2) & a(2,3) \\ a(3,1) & a(3,2) & a(3,3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}
$$

der Übergangswahrscheinlichkeiten ergibt sich die Verteilung der Zustände nach einem Doppelschritt als:

$$P(1) = A \cdot P(0) = (0, 1, 0) \tag{1}$$

oder nach n Doppelschritten

$$P(n) = A^n \cdot P(0) \tag{2}$$

Für die Folgen s_n und g_n können rekursive Bildungsgesetze notiert werden:

$$s_{n+1} = \frac{g_n}{4}, \quad g_{n+1} = s_n + \frac{g_n}{4} \tag{3}$$

Daraus folgt eine homogene Differenzengleichung 2.Ordnung für g_n:

$$g_{n+1} = \frac{1}{4} \cdot (g_n + g_{n-1}), \quad g_0 = 0, \quad g_1 = 1 \tag{4}$$

Die zugehörige, charakteristische Gleichung lautet :

$$m^2 - \frac{1}{4} m - \frac{1}{4} = 0 \tag{5}$$

Nullstellen der charakteristischen Gleichung :

$$m_1 = \frac{1}{8} \left(1 - \sqrt{17}\right), \quad m_2 = \frac{1}{8} \left(1 + \sqrt{17}\right) \tag{6}$$

allgemeine Lösung der Differenzengleichung :

$$g_n = c_1 (m_1)^n + c_2 (m_2)^n \tag{7}$$

Aus der Anfangsbedingung $g_0 = 0$, $g_1 = 1$ werden die Konstanten c_1, c_2 bestimmt:

$$c_1 + c_2 = 0, \quad c_1 m_1 + c_2 m_2 = 1 \quad \rightarrow \quad c_1 = -\frac{4}{\sqrt{17}}, \quad c_2 = \frac{4}{\sqrt{17}} \tag{8}$$

Mit c_1 und c_2 erhalten wir die Lösung der Differenzengleichung (7) zu :

$$g_n = -\frac{2^{2-3n}\left(1 - \sqrt{17}\right)^n}{\sqrt{17}} + \frac{2^{2-3n}\left(1 + \sqrt{17}\right)^n}{\sqrt{17}} \tag{9}$$

Die ersten Glieder der Folge g_n sind :

$$g_0 = 0;\ g_1 = 1;\ g_2 = \frac{1}{4};\ g_3 = \frac{5}{16};\ g_4 = \frac{9}{64};\ g_5 = \frac{29}{256};\ g_6 = \frac{65}{1024};\ g_7 = \frac{181}{4096} \tag{10}$$

Die $k-$te Partialsumme über die Folge g_n lautet:

$$d_k = \textstyle\sum_{n=0}^{k}(g_n) = -(2^{5-3k}(2^{1+3k}\sqrt{17} + 3(1 - \sqrt{17})^k - \sqrt{17}(1 - \sqrt{17})^k - 3(1 + \sqrt{17})^k - \sqrt{17}(1 + \sqrt{17})^k))/ (\sqrt{17}(-7 + \sqrt{17})(7 + \sqrt{17}))$$

Schließlich berechnen wir den Grenzwert der Reihe :

$$d = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{2^{2-3n}\left(1-\sqrt{17}\right)^n}{\sqrt{17}} + \frac{2^{2-3n}\left(1+\sqrt{17}\right)^n}{\sqrt{17}} \right] = \frac{-64}{\left(-7+\sqrt{17}\right)\left(7+\sqrt{17}\right)} = 2 \quad (11)$$

Mit diesem Ergebnis können wir den gesuchten Erwartungswert E der Doppelschritte berechnen:

```
E =     einen Schritt fuer alle Kaefer, die zur Zeit 0 nicht im Ziel sind,
    +   einen Schritt fuer alle Kaefer, die zur Zeit 1 nicht im Ziel sind,
    +   einen Schritt fuer alle Kaefer, die zur Zeit 2 nicht im Ziel sind,
    +   ....
```

also

$$E = \sum_{i=0}^{\infty}(1-z_i) = (1-z_0) + (1-z_1) + (1-z_2) + \ldots \quad (12)$$

Die Summe der Übergangswahrscheinlichkeiten im $n-$ten Schritt beträgt

$$z_n + s_n + g_n = 1 \quad \rightarrow \quad 1 - z_n = s_n + g_n \quad (13)$$

Nach Gleichung (3) beträgt:

$$g_n + s_n = g_n + \frac{g_{n-1}}{4} \quad (14)$$

Die Summation über $1 - z_n$ sieht damit wie folgt aus :

$$\begin{aligned}
1 - z_0 &= s_0 + g_0 = 1 + 0 \\
1 - z_1 &= s_1 + g_1 = g_1 + g_0/4 = g_1 + 0 \\
1 - z_2 &= s_2 + g_2 = g_2 + g_1/4 \\
1 - z_3 &= s_3 + g_3 = g_3 + g_2/4 \\
1 - z_4 &= s_4 + g_4 = g_4 + g_3/4 \\
\ldots
\end{aligned}$$

$$E = \sum_{i=0}^{\infty}(1-z_i) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} g_i + \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} g_i = 1 + 2 + \frac{1}{4} \cdot 2 = 3.5 \quad (15)$$

Das sind die zu erwartenden Doppelschritte. Die zu erwartenden Kanten betragen :

$$K = 2 \cdot E - 1 = 6. \quad (16)$$

Die 1 ist abzuziehen, weil der zum Ziel führende Doppelschritt nur eine Kante durchläuft.