Kreisberührungen

aus Sacred Mathematics - Japanese Temple Geometry

Tony Rothmann

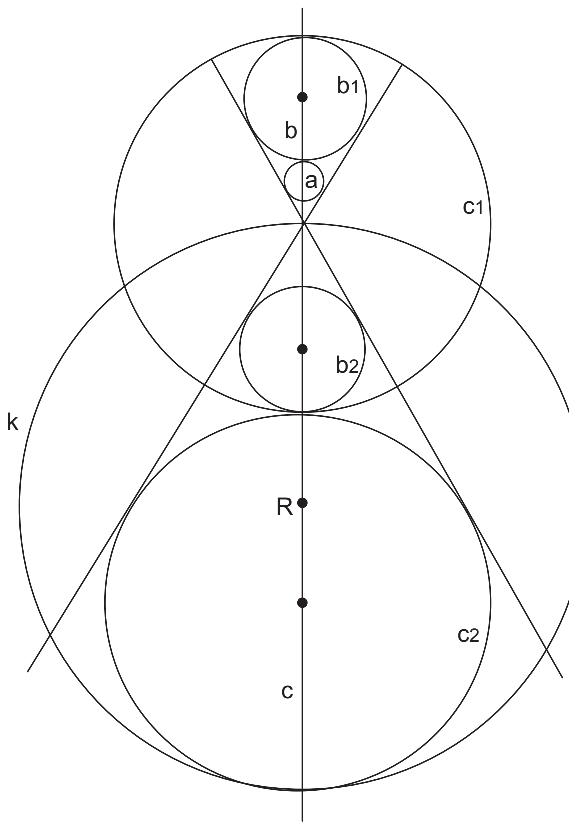

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabenstellung

Vom Mittelpunkt O des Kreises c_1 werden die Tangenten and den gleich großen Kreis c_2 gezogen. Kreis c_2 berührt c_1 von außen. Ein großer Kreis k mit Radius R geht durch den Punkt O und berührt $c2$ von innen. Zwei weitere Kreise b_1 und b_2 tangieren die gemeinsamen Tangenten im Kreis c_1 (siehe Abbildung 1). Ein weiterer, kleiner Kreis a tangiert ebenfalls diese Tangenten und berührt b_1 von außen. Bestimme die Radien R, b, c in Abhängigkeit von a.

Lösungsvorschlag

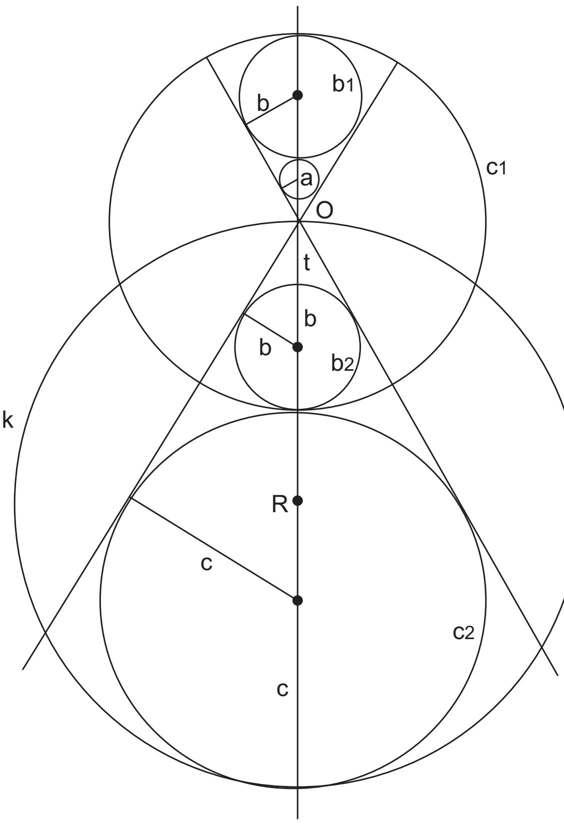

Abbildung 2: Lösungsskizze

Es seien die Punkte- und Streckenbezeichner nach Abbildung 2 gewählt. Aus der inneren Berührung zwischen dem Kreis k und dem Kreis c_2 ergibt sich die Gleichung:

$$2 \cdot R = 2 \cdot c + 2 \cdot b + t \tag{1}$$

Analog erhalten wir innerhalb von c_1:

$$2 \cdot c = 4 \cdot b + 2 \cdot t \quad \rightarrow \quad c = 2\,b + 2\,t \tag{2}$$

Aus der Ähnlichkeit der Berührungsdreiecke folgt:

$$\frac{b}{t+b} = \frac{c}{t+2\,b+c} \qquad \frac{a}{t-a} = \frac{b}{t+b} \tag{3}$$

Die Gleichungen (1) ... (4) werden mit Hilfe eines CAS nach b, c, R, t aufgelöst:

$$b = \frac{a}{2}\left(3+\sqrt{17}\right) \qquad c = \frac{a}{2}\left(13+3\sqrt{17}\right) \tag{4}$$

$$t = \frac{a}{4}\left(7+\sqrt{17}\right) \qquad R = \frac{a}{8}\left(71+17\sqrt{17}\right) \tag{5}$$