

Fünf Kreise und eine Ellipse Teil 1

Gery Huvent

4. Mai 2015

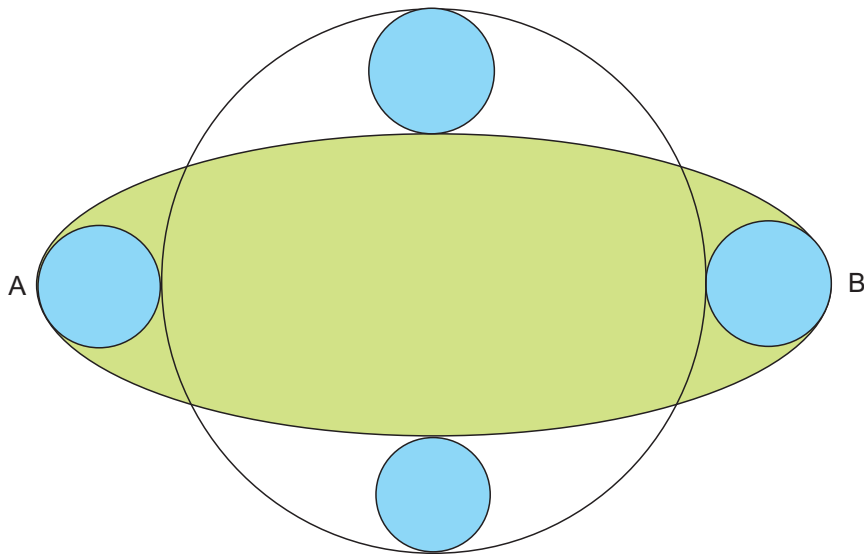


Abbildung 1: Skizze zur Aufgabe

Gegeben ist eine Ellipse mit den Halbachsen a, b . Ein Kreis mit Radius $b < R < a$ liegt mit seinem Mittelpunkt im Zentrum der Ellipse. Weiterhin sind vier gleich große Kreise mit Radius r so zwischen Ellipse und Kreis eingezeichnet, dass diese die Ellipse und den großen Kreis in je einem Punkt berühren. Bestimme das Verhältnis $a \div b$ wenn der Radius r genau dem Krümmungskreis der Ellipse im Punkt A bzw. Punkt B entspricht.

Lösungsvorschlag

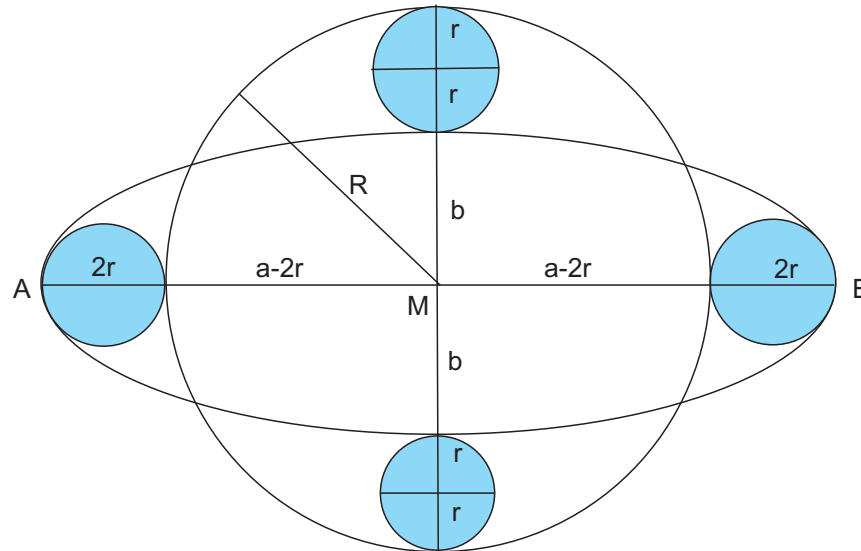


Abbildung 2: Skizze zur Lösung

Es seien die Punkte- und Streckenbezeichner nach Abbildung 2 vereinbart. Aus der Berührung zwischen den vier kleinen Kreisen und der Ellipse bzw. dem großen Kreis folgt:

$$R = a - 2 \cdot r, \quad R = b + 2 \cdot r \quad (1)$$

Der Krümmungskreisbogen der Ellipse in A, B berechnet sich aus:

$$r = \frac{b^2}{a} \quad (2)$$

Wir ersetzen r in (1) und erhalten:

$$R = a - 2 \cdot r = b + 2 \cdot r \rightarrow a = b + 4r = b + \frac{4b^2}{a} \quad (3)$$

Die weitere Umformung und Auflösung der quadratischen Gleichung ergibt:

$$a = b + 4r = b + \frac{4b^2}{a} \rightarrow a^2 - b \cdot a - 4b^2 \quad (4)$$

$$a = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + 4b^2}, \quad \frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \quad (5)$$