Eine Kreispyramide im Dreieck

San-Gaku Rätsel

30. August 2014

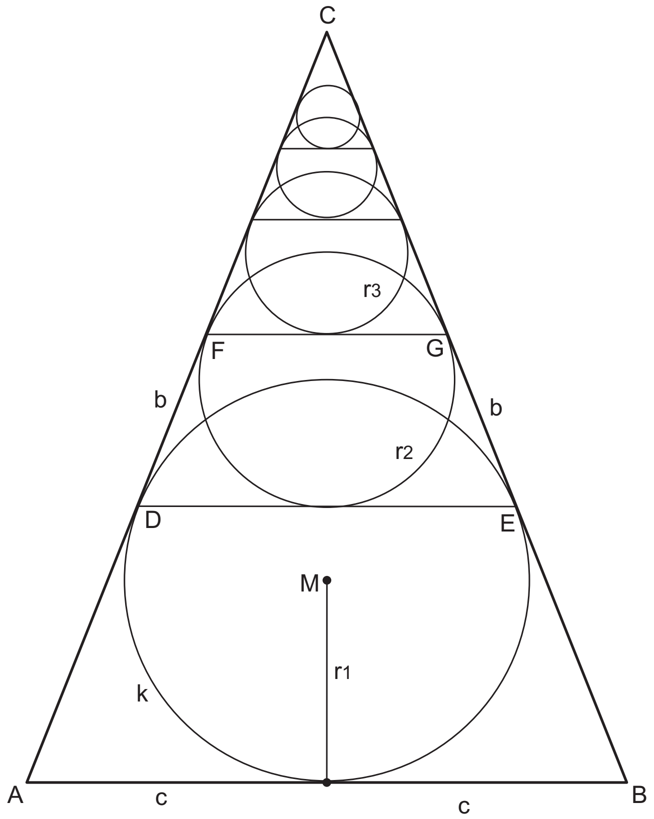

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabe

Gegeben sei das gleichschenklige Dreieck A, B, C mit den Seitenlängen $b = AC = BC$ und $2\,c = AB$. Dem Dreick ist der Inkreis k mit Radius r_1 einbeschrieben. Der Inkreis berührt die Dreieckseiten AC, BC in den Punkten D, E. Dem Dreieck D, E, C ist ebenfalls der Inkreis mit Radius r_2 einbeschrieben (Abb. 1). Er berührt die Dreieckseiten in den Punkten F, G. Dem Dreieck C, F, G wird der Inkreis mit Radius r_3 einbeschrieben. Nach gleichem Schema werden weitere Dreiecke und Inkreise dem Dreieck A, B, C einbeschrieben. Bestimme die Radien der Kreise $r_1, r_2, r_3 \ldots r_i$ in Abhängigkeit von b, c. Berechne die unendliche Summe der Kreisflächeninhalte aller dieser Inkreise.

Lösungsvorschlag

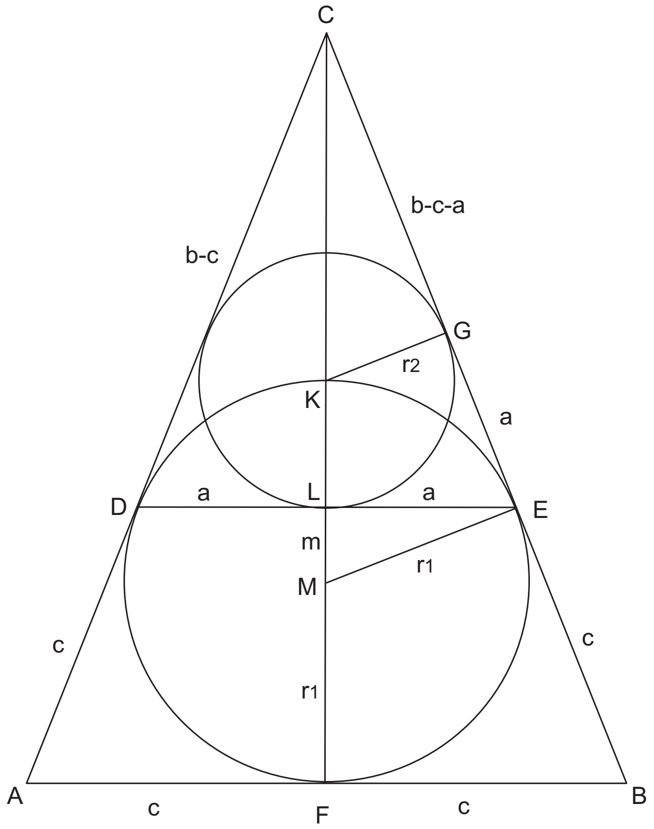

Abbildung 2: Skizze zur Lösung

Die Punkte- und Streckenbezeichner seien nach Abbildung 2 gewählt. Vom Punkt B sind die Tangentenabschnitte an den Inkreis k gleich lang:

$$c = BD = BE \tag{1}$$

ebenso die Tangentenabschnitte vom Punkt E and den Inkreis von Dreieck DEC:

$$a = EL = EG \tag{2}$$

und vom Punkt C an den Inkreis k:

$$b - c = CD = CE \tag{3}$$

Alle in Zeichnung 2 erkennbaren rechtwinkligen Dreicke sind einander ähnlich. Wir können folgende Verhältnisse aufstellen:

$$\frac{b-c}{a} = \frac{b}{c} \quad \rightarrow \quad a = \frac{(b-c) \cdot c}{b} \tag{4}$$

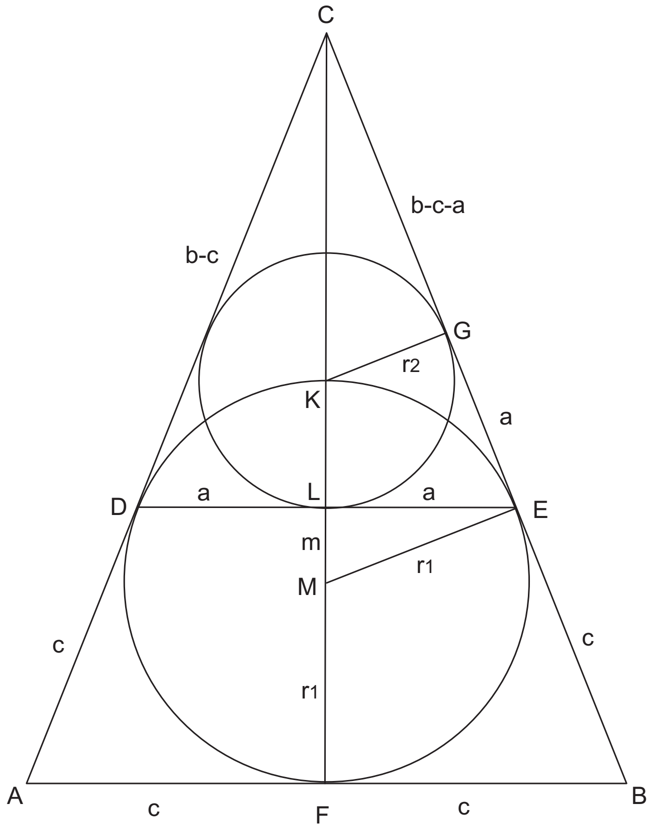

Abbildung 3: Skizze zur Lösung

$$\frac{b-c-a}{r_2} = \frac{b-c}{r_1} \quad \rightarrow \quad r_2 = \frac{(b-c-a)\cdot r_1}{b-c} \tag{5}$$

Wir ersetzen a mit dem Ergebnis aus (4) und erhalten:

$$r_2 = \frac{(b-c-\frac{(b-c)\cdot c}{b})\cdot r_1}{b-c} = r_1 - \frac{r_1\cdot c}{b} = r_1\cdot\left(1-\frac{c}{b}\right) \tag{6}$$

Der nächst kleinere Radius kann also aus dem vorhergenden Radius und dem Verhältnis der anliegenden Seiten berechnet werden. Das Verhältnis der anliegenden Seiten bleibt aber immer gleich $c \div b$, wie die folgenden Rechnung zeigt:

$$r_3 = r_2\cdot\left(1-\frac{a}{b-c}\right) = r_2\cdot\left(1-\frac{(b-c)\cdot c}{b\cdot(b-c)}\right) = r_2\cdot\left(1-\frac{c}{b}\right) \tag{7}$$

Wenn wir r_2 in der letzten Gleichung durch r_1 ersetzen, erhalten wir:

$$r_3 = r_2\cdot\left(1-\frac{c}{b}\right) = r_1\cdot\left(1-\frac{c}{b}\right)^2 \quad \rightarrow \quad r_i = r_1\cdot\left(1-\frac{c}{b}\right)^{i-1} \tag{8}$$

Die Summe der Kreisflächeninhalte beträgt dann:

$$F = \pi \cdot (r_1)^2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{c}{b}\right)^{2\,(i-1)} = \frac{\pi\, b^2\, {r_1}^2}{2\, b\, c - c^2} \tag{9}$$

Der Inkreisadius r_1 kann im gleichschenkligen Dreieck ABC aus der Höhe $h = \sqrt{b^2 - c^2}$ und der Verhältnisgleichung

$$\frac{h - r_1}{r_1} = \frac{b}{c} \quad \rightarrow \quad r_1 = \frac{c\,\sqrt{b^2 - c^2}}{b + c} \tag{10}$$

bestimmt werden. Für den Flächeninhalt aller Kreise erhalten wir schließlich:

$$F = \frac{\pi\, b^2 \left(\frac{c\,\sqrt{b^2 - c^2}}{b+c}\right)^2}{2\, b\, c - c^2} = \frac{\pi\, b^2\, c\, (b - c)}{(2\, b - c)\, (b + c)} \tag{11}$$

Eine Näherungsformel für π

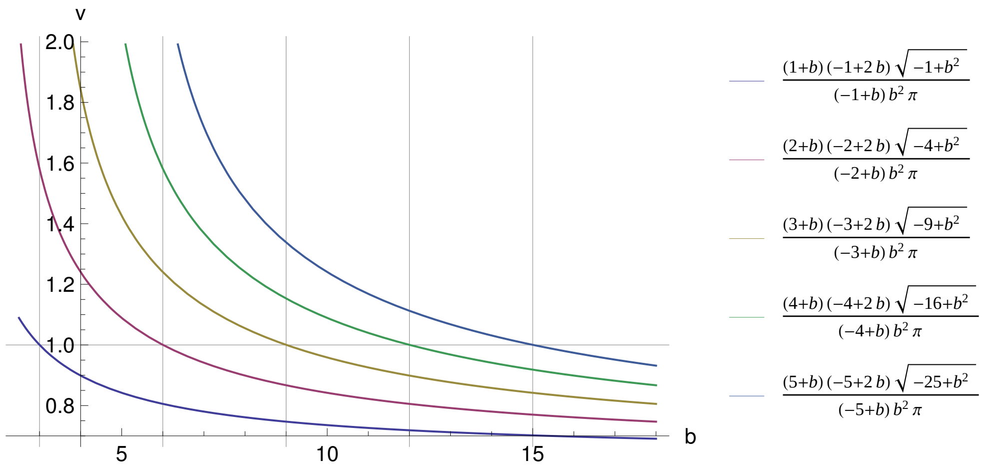

Abbildung 4: Skizze zur Lösung

Wir betrachten das Verhältnis zwischen Dreiecksfläche und F:

$$v = \frac{A_{ABC}}{F} = \frac{(2b - c)(b + c)\sqrt{b^2 - c^2}}{\pi b^2 (b - c)} \tag{12}$$

Plottet man v für ganzzahlige Werte von c so stellt man fest, dass immer bei $b = 3\,c$ das Verhältnis fast annähernd 1 beträgt. Setzt man $b = 3\,c$ in v ein, so erhält man

$$b = 3\,c \quad \rightarrow \quad v = \frac{20\,\sqrt{2}}{9\,\pi} \approx 1.000351462 \quad \rightarrow \quad \pi \approx \frac{20\,\sqrt{2}}{9} \tag{13}$$

eine Näherungsformel für π.