# Die Kreise des Archimedes

Zwillingskreise

http://home.wxs.nl/ lamoen/wiskunde/Arbelos/Catalogue.htm

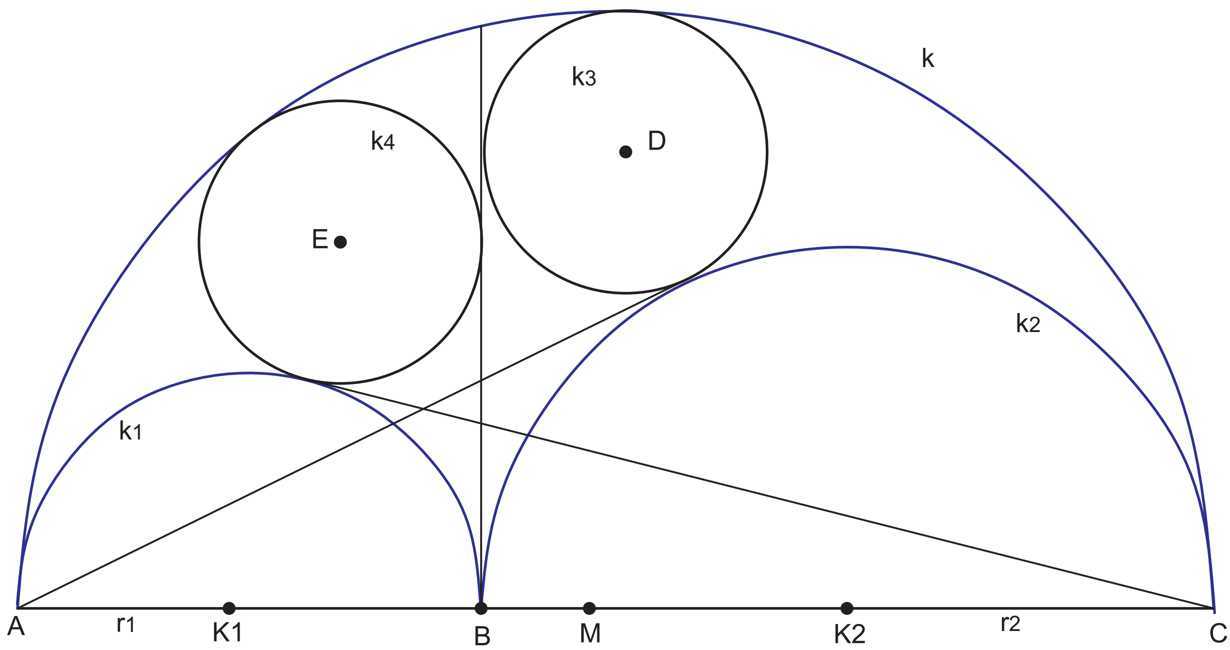


Abbildung 1: Skizze zur Aufgabenstellung

Die folgende Aufgabe entstammt der Sammlung *Archimedian circles*

`http://home.wxs.nl/~lamoen/wiskunde/Arbelos/Catalogue.htm`

Gegeben sei der Halbkreis $k(M, r)$. Dem Halbkreis sind zwei kleinere Halbkreise $k_1, k_2$ einbeschrieben - die sogenannten Kreise des Archimedes. Für die Radien der Kreise gilt:

$$r = r_1 + r_2 \tag{1}$$

Im Punkt $B$ wird die Senkrechte $h$ zum Durchmesser errichtet. Zwischen dem Halbkreis $k, k_1$ und $h$ ist der Kreis $k_4$ eingebettet und zwischen $k, k_2$ und $h$ liegt der Kreis $k_3$ - siehe Abbildung 1. Die Kreise werde als die *Zwillingskreise des Archimedes* bezeichnet. Zeige dass beide Kreise den gleichen Radius haben und berechne diesen aus den gegebenen Werten $r, r_1$ und $r_2$.

## Lösungsvorschlag

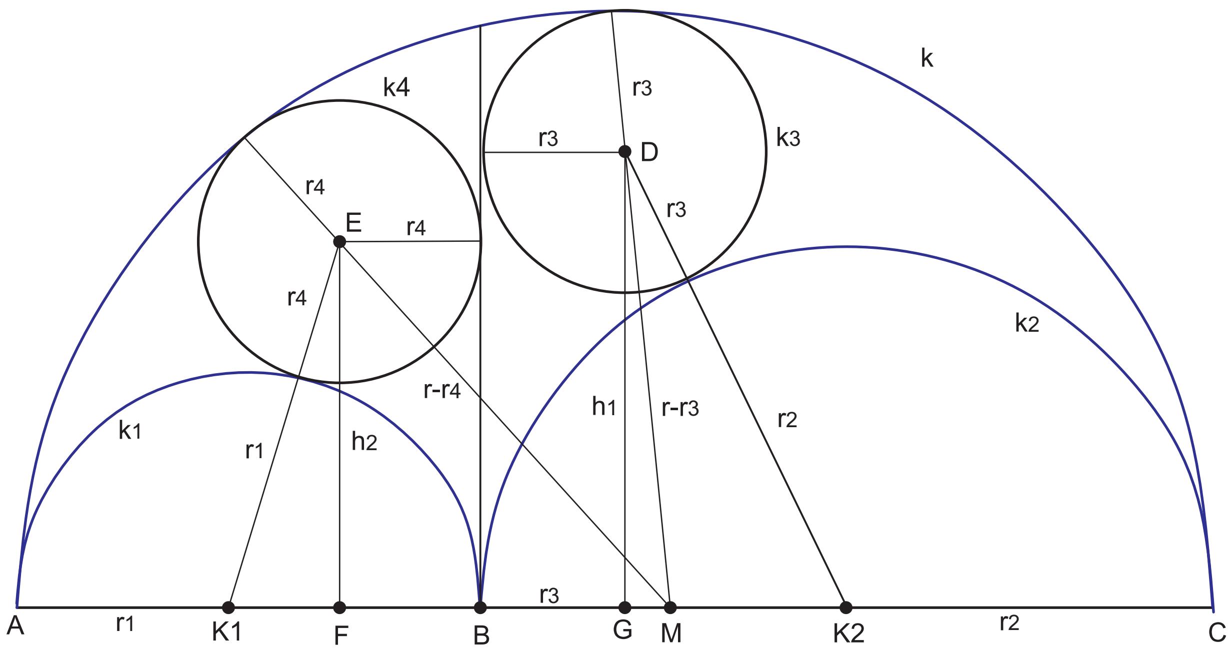


Abbildung 2: Skizze zur Lösung

Wir beginnen mit der Berechnung von $r_3$. Aus der Berührung zwischen $k_3$ und $k_2$ folgt das Berührungsdreieck:

$$\triangle GDK_2 \quad {h_1}^2 + (r_2 - r_3)^2 = (r_2 + r_3)^2 \quad \rightarrow \quad h_1^2 = 4\,r_2\,r_3 \tag{2}$$

und aus der Berührung zwischen $k$ und $k_3$ folgt mit dem Pythagoras:

$$\triangle GDM \quad {h_1}^2 + (r - 2\,r_1 - r_3)^2 = (r - r_3)^2 \tag{3}$$

$$h_1^2 + 4\,r_1(-r + r_1 + r_3) = 0 \tag{4}$$

Die Auflösung der Gleichungen (1), (2) und (4) führt auf:

$$r_3 = \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2}, \quad h_1 = \frac{2\,\sqrt{r_1}\,r_2}{\sqrt{r_1 + r_2}} \tag{5}$$

Analog berechnen wir den Radius $r_4$ aus:

$$\triangle K_1EF \quad h_2^2 + (r_1 - r_4)^2 = (r_1 + r_4)^2 \tag{6}$$

$$\triangle MEF \quad h_2^2 + (r - 2\,r_1 + r_4)^2 = (r - r_4)^2 \tag{7}$$

Die Auflösung der Gleichungen (6) und (7) ergeben:

$$r_4 = \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2}, \quad h_2 = \frac{2\,\sqrt{r_2}\,r_1}{\sqrt{r_1 + r_2}} \tag{8}$$