

Sangaku Problem 1.1.5

Echio Nomura

Japanese Temple
Mathematical problems in Nagano Pref. Japan

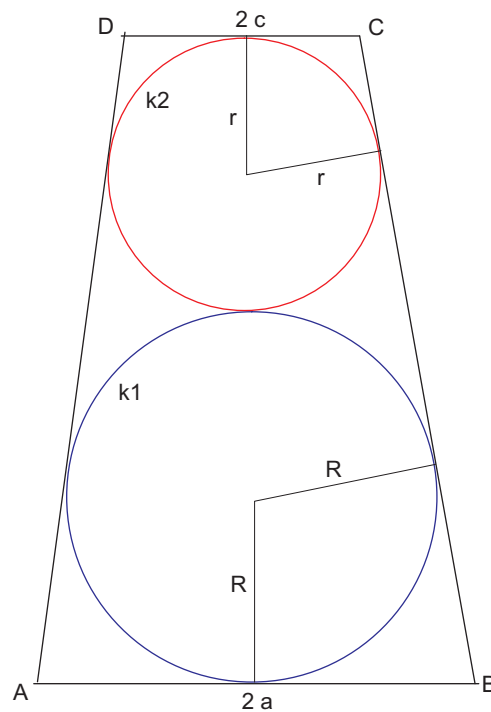


Abbildung 1: Skizze zur Aufgabe

Einem Trapez $ABCD$ sind die Kreise k_1 und k_2 eingeschrieben (Abbildung 1).
Bestimme die Radien R, r wenn die Strecken $2a = \overline{AB}$ und $2c = \overline{CD}$ gegeben sind.

Lösungsvorschlag

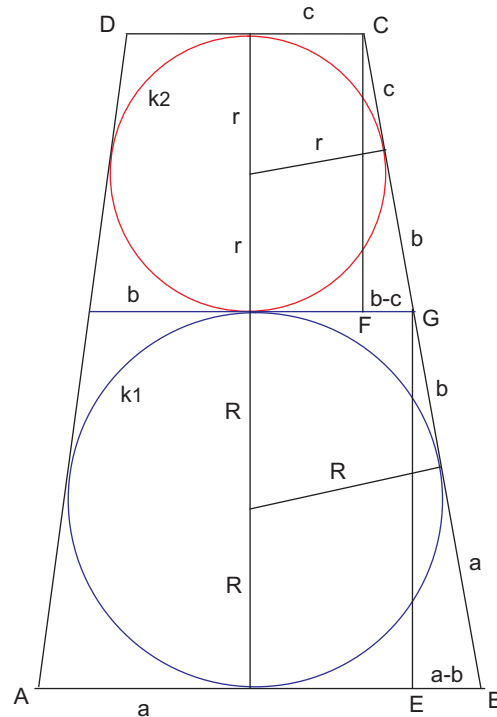


Abbildung 2: Dreieck BEG und Dreieck CFG sind ähnlich zueinander

Die Strecken und Punktebezeichner seien entsprechend Abbildung 2 gewählt. Im rechtwinkligen Dreieck BEG gilt der *Satz des Pythagoras*:

$$\triangle BEG : \quad (2R)^2 + (a-b)^2 = (a+b)^2 \quad \rightarrow \quad R = \sqrt{ab} \quad (1)$$

Analog gilt für Dreieck CFG :

$$\triangle CFG : \quad (2r)^2 + (b-c)^2 = (b+c)^2 \quad \rightarrow \quad r = \sqrt{bc} \quad (2)$$

Die Dreiecke BEG und CFG sind darüber hinaus ähnlich und es gilt das Verhältnis:

$$\frac{2R}{a+b} = \frac{2r}{b+c} \quad (3)$$

Nach Auflösung der Gleichungen (1), (2) und (3) erhält man:

$$R = \sqrt[4]{a^3 c}, \quad r = \sqrt[4]{a c^3}, \quad b = \sqrt{ac} \quad (4)$$