Der Reisebeginn

Alexander Weiß, Humboldt UNI Berlin

Aufgabe aus dem digitalen Adventskalender 2009

Der Weihnachtsmann klappert Deutschland jedes Jahr in einer Rundreise ab. Er startet in einer Großstadt und fliegt dann das Bundesgebiet im Uhrzeigersinn ab. Die möglichen Anfangsstädte sind traditionell Hamburg, Berlin und München. Welche Stadt tatsächlich der Ausgangspunkt ist, hängt vom Zufall und von der letztjährigen Wahl ab. Das Diagramm

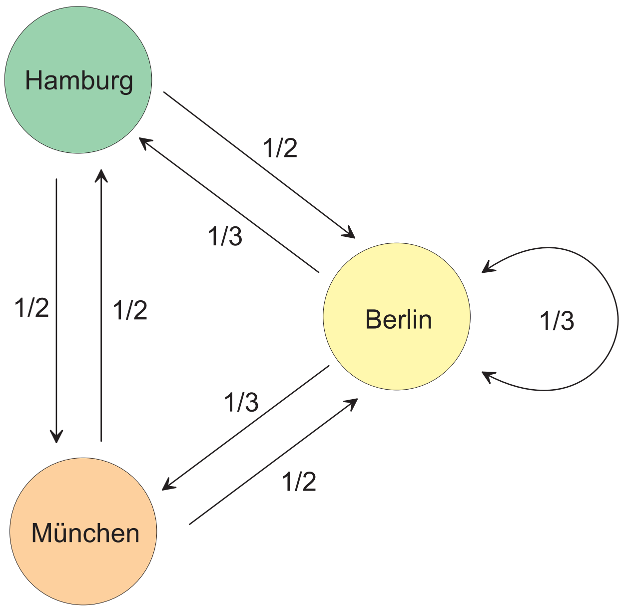

Abbildung 1: Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den Städten

gibt die Startwahrscheinlichkeiten für die einzelnen Städte in Abhängigkeit vom Startpunkt des Vorjahres an. So bedeutet zum Beispiel der Pfeil, der von München auf Hamburg zeigt und an dem 1/2 steht, dass die Wahrscheinlichkeit, dieses Jahr in Hamburg zu starten, bei 50 % liegt, wenn der Weihnachtsmann letztes Jahr seine Tour in München begonnen hat. Es gibt historische Quellen, aus denen sicher hervorgeht, dass der Weihnachtsmann im Jahre 1900 seine Tour in Berlin begonnen hat. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit (auf zwei Nachkommastellen gerundet), dass er auch dieses Jahr (2009) seine Reise dort beginnt?

Antwortmöglichkeiten:

1. 0 %
2. 10,38 %
3. 28,57 %
4. 33,33 %
5. 42,86 %
6. 50,00 %
7. 66,67 %
8. 78,25 %
9. 86,29 %
10. 100,00 %

Projektbezug:
Hinter dieser Frage steckt die Theorie gedächtnisloser stochastischer Prozesse. Solche mathematischen Objekte benutzt man, um das zufällige Verhalten von Systemen zu beschreiben, deren Änderung nur vom aktuellen Zustand,aber nicht von der Vergangenheit abhängt. Mit diesem recht simplen Ansatz lassen sich bereits diverse Effekte zum Beispiel in der Physik, der Populationsbiologie, der Meteorologie oder auch dem Finanzwesen modellieren.

Lösungsweg über Markov-Ketten

Wir können die Aufgabe mit Hilfe von Markov-Ketten modellieren. Jede Stadt bezeichnet darin einen Zustand und die Pfeile geben die Übergangswahrscheinlichkeiten von einem Zustand zu einem anderen Zustand zu gelangen an. Die Übergangswahrscheinlichkeiten werden in einer Matrix zusammengefasst. Die Reihenfolge der Zeilen und Spalten sei , Berlin, München, Hamburg. In der Hauptdiagonale stehen die Wahrscheinlichkeiten im selben Zustand zu verweilen. Zeilenweise von links nach rechts stehen die Wahscheinlichkeiten in Uhrzeigerrichtung zu reisen. Spaltenweise von oben nach unten gelesen stehen die Wahrscheinlichkeiten gegen die Uhrzeigerrichtung zu fliegen.

$$\mathbf{M} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} B & M & H \end{array} \\ \begin{array}{c} B \\ M \\ H \end{array} & \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{1}$$

Aus der Theorie der Markoff-Ketten ist bekannt, daß der ersten Spaltenvektor $M[i,1]^n$ genau die Wahrscheinlichkeit ist, nach n Schritten wieder im Zustand i zu landen, wenn man im Zustand i startet. *Mathematica* liefert für M^n folgende explizite Darstellung, die man z.B. durch Diagonalisierung der Matrix selber bekommen kann, was jedoch sehr mühsam ist.

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{7}+\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{3}\right)^n 2^{2-n} & \frac{2}{7}-\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{3}\right)^n 2^{1-n} & \frac{2}{7}-\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{3}\right)^n 2^{1-n} \\ \frac{3}{7}-\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{2}\right)^n 3^{1-n} & \frac{2}{7}+(-1)^n 2^{-1-n}+\frac{1}{7}(-1)^n 2^{-1-n}3^{1-n} & \frac{2}{7}-(-1)^n 2^{-1-n}+\frac{1}{7}(-1)^n 2^{-1-n}3^{1-n} \\ \frac{3}{7}-\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{2}\right)^n 3^{1-n} & \frac{2}{7}-(-1)^n 2^{-1-n}+\frac{1}{7}(-1)^n 2^{-1-n}3^{1-n} & \frac{2}{7}+(-1)^n 2^{-1-n}+\frac{1}{7}(-1)^n 2^{-1-n}3^{1-n} \end{pmatrix}$$

Die erste Spalte gibt die Wahrscheinlichkeiten wieder nach n Jahren wieder in der gleichen Stadt zu starten, also

$$\begin{aligned} p(B) &= M^n_{11} = \frac{3}{7}+\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{3}\right)^n 2^{2-n} \\ p(M) &= M^n_{21} = \frac{3}{7}-\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{2}\right)^n 3^{1-n} \\ p(H) &= M^n_{31} = \frac{3}{7}-\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{2}\right)^n 3^{1-n} \end{aligned}$$

Wir prüfen unsere Formel für $n = 0$, d.h. den Startzustand und erhalten:

$$p(B,0) = 1, \qquad p(M,0) = 0, \qquad p(H,0) = 0$$

Nach einem Jahr besteht die Startwahrscheinlichkeit zu:

$$p(B) = \frac{1}{3}, \qquad p(M) = \frac{1}{3}, \qquad p(H) = \frac{1}{3}$$

Wenn der Weihnachstmann 1900 in Berlin gestartet war, so sind bis Weihnachten 2009 genau 109 Jahre vergangen. Die Wahrscheinlichkeit nach 109 Jahren wieder in Berlin zu starten beträgt dann:

$$p(B,109) = \frac{3}{7} + \frac{1}{7}\left(-\frac{1}{3}\right)^{109} 2^{2-109} \approx 0.428571 \tag{2}$$

Die Wahrscheinlichkeit nach 109 Jahren wieder in Berlin zu starten beträgt $42,8571\,\%$ was der Antwortmöglichkeit 5 entspricht.

Ergänzung: Grenzwertbetrachtungen

Oft interessiert man sich für die Grenzwerte in den oben beschriebenen Prozessen, d.h. was passiert wenn $n \to \infty$ geht. Zur obigen Aufgabe denken wir uns in das Jahr 1900 zurück. Wir wollen von dort in die Zukunft blicken und fragen nach den Wahrscheinlichkeiten mit der der Weihnachtsmann in Hamburg, Berlin oder München starten wird, wenn er 1900 in der jeweiligen Stadt begonnen hat.

$$p(B,\infty) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{7} + \frac{1}{7}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n} 2^{2-n}\right] = \frac{3}{7} \approx 0.428571 \tag{3}$$

$$p(B,\infty) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{7} - \frac{1}{7}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n} 3^{1-n}\right] = \frac{2}{7} \approx 0.285714 \tag{4}$$

$$p(H,\infty) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{7} - \frac{1}{7}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n} 3^{1-n}\right] = \frac{2}{7} \approx 0.285714 \tag{5}$$

In der folgenden Grafik ist ersichtlich, dass schon nach wenigen Jahren der Grenzwert erreicht ist.

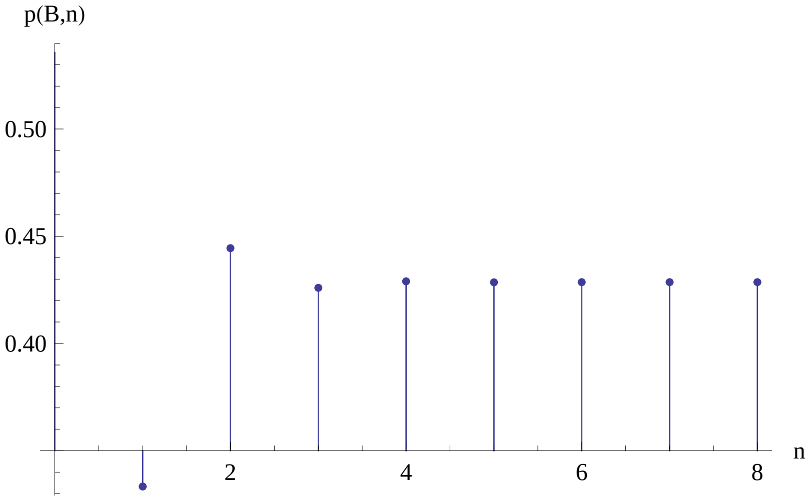

Abbildung 2: Startwahrscheinlichkeiten von Berlin aus in den ersten 8 Jahren