Über das Sammeln vollständiger Figurenserien

Ingmar Rubin, Berlin

aus Newgroup de.sci.mathematik

Vorgeschichte

Vor einiger Zeit fand ich den folgenden Beitrag in der Newsgroup de.sci.mathematik:

Liebe Gruppe,
diesen Sommer hatten wir ein Ferienhaus in der Bretagne gemietet. Es waren wundervolle zwei Wochen mit erstaunlich unbretonischem Wetter, die mich so richtig abschalten ließen, so daß ich den Kopf mal wieder für etwas Mathematik frei hatte. Und schon hielt mich ein Problem in Bann, das ich bis heute nicht gelöst habe.
Wir kauften unsere Sachen meistens im Supermarkt. Habt Ihr schon mal eine Weinabteilung in einem französischen Supermarkt gesehen? Nein? Solltet Ihr aber. Aber zur Sache: in diesem Supermarkt gab es einen Automaten mit Figuren zum neuen Heffalump-Film. (Für Nichteingeweihte bzw. Kinderlose: das ist das neueste Winnie-Puuh-Machwerk von Disney.) Es gab sechs verschiedene Figuren, wenn man ein 2-Euro-Stück reinwarf, kam eine raus. Irgendeine. Meine Tochter wollte aber das Ferkel.
Nun gut, wir warfen zwei Euro rein und bekamen den Esel. Auch ganz nett. Am nächsten Tag kam Tigger. Am übernächsten auch. Und nun beging ich den Fehler, meiner Tochter zu erklären, daß, wenn man vielleicht zehnmal zieht, die Chance bestimmt schon recht hoch ist, auch mal das Ferkel zu kriegen. Ab dann mußten wir nämlich täglich in diesen Supermarkt. War nicht so schlimm, habe ich Euch schon erzählt, wie groß die Weinabteilung ... Ach so.
Und dann wollte ich's wissen: wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei angenommener Gleichverteilung und beliebig vielen Figuren im Automaten, mit zehn Zügen alle sechs zu haben? Kann nicht so schwer sein, dachte ich, nahm Papier und Bleistift und fing an. Schnell hatte ich raus, daß es bei sechs Zügen $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ Möglichkeiten gibt, die Figuren zu bekommen und $6^6 = 46656$ Möglichkeiten insgesamt. Das ist eine Chance von $1,5\%$, konnte ich meine Tochter trösten. Dann wollte ich weiterrechnen. Ich weiß schon nicht mehr, ob und wie ich es schaffte, die Zahl für sieben Züge auszurechnen, die Zettel habe ich weggeworfen. Ich glaube, ich hatte etwa 20% für neun Züge raus, was uns nicht gerade ermutigte,

und tatsächlich hatten wir zum Schluß, glaube ich, fünfzehn Figuren, aber kein Ferkel. Das haben wir dann für fünf Euro im Supermarkt gekauft, sah zwar nicht ganz so aus wie das aus dem Automaten, aber immerhin.
Zu Hause am Computer dachte ich 'jetzt will ich's wissen' und schrieb ein kleines Primitivprogramm, das z. B. bei allen Neunerkombinationen der Zahlen 1 bis 6 diejenigen zählt, bei denen eben alle sechs Zahlen vorkommen, und ließ es laufen.
Das Ergebnis:

Züge	Kombinationen mit 1-6	Kombinationen gesamt	Prozent
6	720	46656	1,5
7	15120	279936	5,4
8	191520	1679616	11,4
9	1905120	10077696	18,9
10	16435440	60466176	27,2
11	129230640	362797056	35,6
12	953029440	2176782336	43,8
13	6711344640	13060694016	51,4

Kein Wunder also. Aber wie rechnet man sowas? Anders ausgedrückt: welche Formel ergibt die Wahrscheinlichkeit, daß bei einem Wurf mit n Würfeln die Zahlen 1 bis 6 erscheinen? Das kann doch nicht so schwer sein. Die Gesamtkombinationen sind natürlich die Sechserpotenzen, aber bei den anderen Zahlen verliere ich mich andauernd in irgendwelchen Fakultäten und Permutationen. Vielleicht kommt noch ein Programmierfehler dazu, und die Zahlen stimmen sowieso nicht.
Hilft mir jemand?
Viele Grüße Steffen

Eine äquivalente Aufgabenstellung

Eine äuivalente Aufgabenstellung zum oben geschilderten Problem fand ich einige Wochen später in der gleichen Newsgroup:

Hallo Forum!
Ich habe ein Problem aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung, das ich nicht sicher gelöst bekomme. Es lautet: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei 10-maligem Werfen eines normalen Würfels mit 6 Seiten, die Zahlen 1 bis 6 jeweils mindestens einmal auftauchen.
Meine eigene Überlegung lautet:

$$p = \frac{6! \cdot 6^4}{6^{10}} \tag{1}$$

Ich würde mich über das richtige Ergebnis freuen - Benedikt Kaiser (benedikt.kaiser@planet-interkom.de)