

## Ein Bug am Nordpol

Christian Hercher, Europa-Universität Flensburg

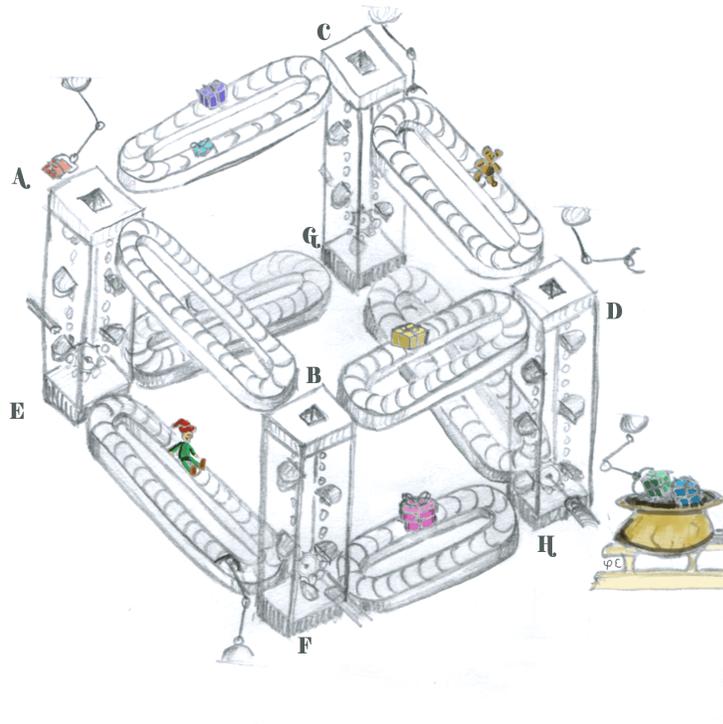


Abbildung 1: Skizze zur Aufgabenstellung

'Na, was ist denn hier los'?! Wichtel Willi, der in der Geschenke-Fabrik die Herstellung, Verpackung und Lieferung (bis zum Schlitten) überwacht, stellt fest, dass sich das Förderband-System nicht so verhält, wie es sollte. 'Das muss wohl ein Bug sein, ein Fehler in der Programmierung.' Bevor aus der Produktion die Geschenke in den Sack auf dem Schlitten gelangen, damit sie der Weihnachtsmann dann den braven Kindern zukommen lassen kann, müssen sie erst einmal dorthin transportiert werden. Dafür gibt es ein ausgeklügeltes - und eigentlich perfekt funktionierendes - System von Förderbändern. Dabei kommen die Geschenke in Punkt A von den fleißigen Wichteln, die sie herstellen, an und werden schließlich am Punkt H in den Schlitten verladen. Dabei verbinden die Förderbänder genau die folgenden Punkte: A mit B, A mit C, B mit D, C mit D, A mit E, B mit F, C mit G, D mit H, E mit F, E mit G, F mit H und G mit H. (Die Förderband-Transportanlage ist in der untenstehenden Zeichnung skizziert.) Um von A nach H zu kommen, können die Geschenke auf den Förderbändern von einem Punkt zum nächsten fahren. Jede solche Fahrt von einem Punkt zum nächsten dauert 1 Minute. Dort angekommen, werden die Geschenke automatisch und ohne zeitliche

Verzögerung auf das nächste Förderband verladen, und die Reise geht weiter. Dabei können die Förderbänder prinzipiell in beide Richtungen benutzt werden, d.h., man kann von A nach B gelangen, aber auch von B direkt wieder zurück zu A. Eigentlich sollte das automatische Umladen so funktionieren, dass jedes Geschenk in kürzester Zeit sein Ziel im Punkt H erreicht.

Doch etwas läuft gerade völlig schief: Anstatt die Geschenke auf einer optimalen Route durch das Förderbandsystem zu schicken, funktionieren die Umsetzer an den Punkten A bis H nicht mehr: Kommt dort ein Geschenk an, so wird dieses im nächsten Takt zufällig - genauer: mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit - auf eines der Förderbänder, die von diesem Punkt ausgehen, gesetzt und auf die weitere Reise geschickt. Teilweise werden sie sogar dorthin zurückgesandt, wo sie eben herkamen. Selbst in Punkt H wird das Geschenk nicht mehr vom Förderband genommen und in den Schlitten verladen, sondern wird weiter nach dem oben beschriebenen Prinzip durch die Anlage geschickt. Zum Glück konnte Willi das Auftreten der Fehlfunktion recht schnell entdecken: Nur 5 Minuten nach dem Einsetzen dieser Fehlfunktion fällt diese ihm auf, er betätigt den roten Knopf und alles steht still. Doch wo ist nun das Geschenk, das zeitgleich mit dem Einsetzen der Störung in Punkt A seine Reise begann? Genauer fragt Willi sich, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich das Geschenk glücklicherweise doch gerade an Punkt H befindet und nun einfach in den Schlitten geladen werden kann? Zusatzfrage (außerhalb der Wertung): Wie würde sich das Ergebnis verändern, wenn Willi die Störung erst eine, zwei oder vier Minuten später festgestellt hätte? Antwortmöglichkeiten:

1. 0
2.  $1/8$
3.  $1/4$
4.  $1/243$
5.  $2/81$
6.  $1/2$
7.  $2/9$
8.  $20/81$
9.  $32/81$
10. 1

## Lösung mit Markov-Ketten

Wir stellen uns die Stationen A bis H als Zustände eines verketteten Systems vor. Ein Zustandvektor  $p_k$  der Länge 8 repräsentiert die Wahrscheinlichkeiten, mit der sich ein Paket an der Position A .. H (im Vektor  $p_k$  Position 1 ... 8) befindet. Der Anfangszustand ist die Belegung

$$p_0 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \quad (1)$$

d.h. auf Position A (1. Stelle im Vektor) befindet sich mit der Wahrscheinlichkeit 1 ein Paket. Der Zustandswechsel nach jeder Minute wird mit Hilfe der Übergangsmatrix berechnet. Sie gibt die Wahrscheinlichkeiten an, mit der man sich von A nach B von B nach C usw. bewegt. Da jeder Knotenpunkt drei Abgänge hat, beträgt die Wahrscheinlichkeit immer  $1/3$ . Die 8x8 Matrix für unser Transportsystem sieht wie folgt aus:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Nach jeder Minute berechnet sich die neue Belegung nun wie folgt:

$$p_1 = p_0 \cdot M = \left\{ 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0, 0, 0 \right\} \quad (3)$$

$$p_2 = p_1 \cdot M = \left\{ \frac{1}{3}, 0, 0, \frac{2}{9}, 0, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}, 0 \right\} \quad (4)$$

$$p_3 = p_2 \cdot M = \left\{ 0, \frac{7}{27}, \frac{7}{27}, 0, \frac{7}{27}, 0, 0, \frac{2}{9} \right\} \quad (5)$$

$$p_4 = p_3 \cdot M = \left\{ \frac{7}{27}, 0, 0, \frac{20}{81}, 0, \frac{20}{81}, \frac{20}{81}, 0 \right\} \quad (6)$$

$$p_5 = p_4 \cdot M = \left\{ 0, \frac{61}{243}, \frac{61}{243}, 0, \frac{61}{243}, 0, 0, \frac{20}{81} \right\} \quad (7)$$

Wir sehen also dass nach 5 Minuten der Zustand H mit der Wahrscheinlichkeit  $w = 20/81$  belegt ist. Antwortmöglichkeit 8 ist richtig. Nach einer, zwei oder vier Minuten ist die Wahrscheinlichkeit für Platz H gleich Null.