Maulwurf in Not

Ariane Beier, Falk Ebert

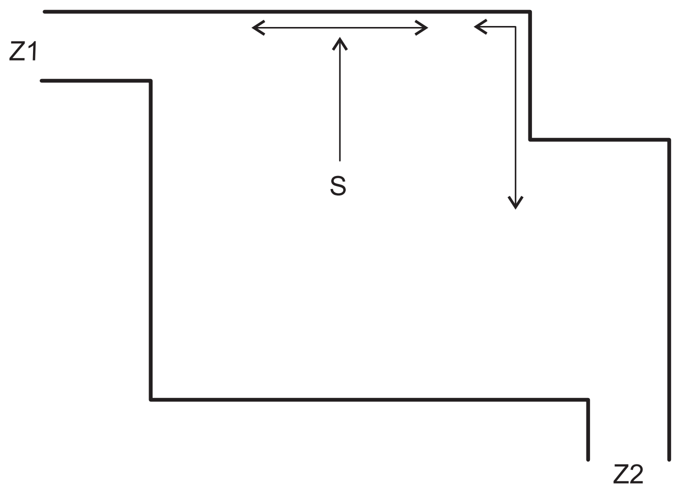

Abbildung 1: Keller der Wichtelfamilie. S: Marcos Startposition. Z1 und Z2: Ausgänge des Kellers.

Das kleine Wichtelmädchen Wilma hat letztes Jahr zu Weihnachten einen lang ersehnten Wunsch erfüllt bekommen: Sie hat nun endlich auch ein eigenes Haustier, einen Maulwurf, den sie Marco nennt. (WARNUNG: Maulwürfe sind als Haustiere für Menschenkinder leider nicht geeignet!!!) Wilma hat allerdings unterschätzt, wie viel Auslauf so ein Tier braucht. Wenn es dem kleinen Racker mal wieder zu langweilig in Wilmas Wichtelkinderzimmer wird, büchst er kurzerhand aus. Auf der Suche nach schmackhaften Insekten, die es sich jetzt im kalten Winter in den Kellern der Wichtelhäuser gemütlich machen und auf den Frühling warten, hat sich Marco auch schon einige Male verlaufen: Wie man weiß, sind Maulwürfe fast gänzlich blind und orientieren sich vor allem über ihren Tast- und Geruchssinn. Da im Hause der Wichtelfamilie aber schon seit Wochen die köstlichsten Weihnachtsleckereien gekocht und gebacken werden, riecht es wie auf einem Weihnachtsmarkt. Marcos Geruchssinn ist dadurch völlig verwirrt.
Heute ist es wieder soweit... Marco sitzt in der Mitte des Wichtelkellers (s. Abb. 1) beim Punkt S und läuft in Richtung Norden. Solange er auf kein Hindernis trifft, läuft er immer schnurstracks geradeaus. Trifft er auf eine Wand, dann läuft er in die eine oder andere Richtung an der Wand entlang weiter - beides mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Verliert er dabei den Kontakt zur Wand, ist ihm das egal, er läuft trotzdem geradeaus weiter. Kommt er an eine Ecke, dann biegt er mit 50% Wahrscheinlichkeit an der Ecke ab und mit 50% Wahrscheinlichkeit dreht er um und läuft zurück in die Richtung, aus der er gekommen ist.
Aus dem Keller gibt es zwei Ausgänge, $Z1$ und $Z2$, die er mit Wahrscheinlichkeiten $PZ1$ und $PZ2$ erreicht. Wie verhalten sich diese Wahrscheinlichkeiten

zueinander, d. h. wie lautet das Verhältnis $PZ1 : PZ2$?

Antwortmöglichkeiten:

1. 1 : 1, d.h. beide Ausgänge sind gleichwahrscheinlich.
2. 2 : 1, d.h. Ausgang Z1 ist doppelt so wahrscheinlich wie Z2.
3. 3 : 1.
4. 5 : 1.
5. 6 : 1.
6. 13 : 2.
7. 16 : 3.
8. 64 : 13.
9. 128 : 25.
10. Das Verhältnis ist mit den angegebenen Daten nicht bestimmbar.

Lösung mit Markov-Ketten

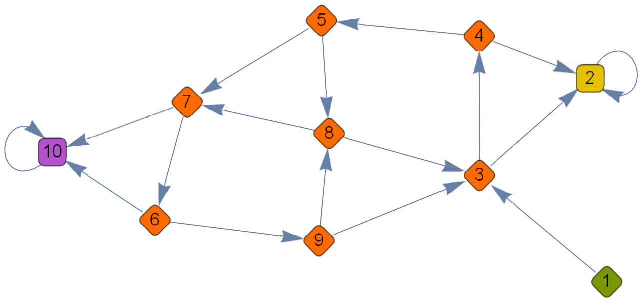

Abbildung 2: Skizze zur Aufgabenstellung

Wir können uns den Keller und seine Wände als 10 Zustände eines diskreten Markovprozesses vorstellen. Zwischen den Zuständen gibt es Übergangswahrscheinlichkeiten, die in einer Übergangsmatrix abgebildet werden. Die Ausgänge Z1 und Z2 sind dabei stationäre Zustände, d.h. werden sie einmal erreicht verweilt der Maulwurf dort für immer. Vom Startknoten S geht es mit der Wahrscheinlichkeit 1 zu $W1$ (Wand 1). Zwischen den Zuständen gibt es Übergangswahrscheinlichkeiten von 1/2. In *Mathematica* können wir mit den folgenden Kommandos die Wahrscheinlichkeit berechnen, bis wir den stationären Zustand Z1 bzw. Z2 erreicht haben.

```
proc1 = DiscreteMarkovProcess[{1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, M1];
MarkovProcessProperties[proc1]
PDF[StationaryDistribution[proc1], 2]  -> 5/6
PDF[StationaryDistribution[proc1], 10] -> 1/6
```

Das Verhältnis $PZ1 : PZ2$ beträgt $5 : 1$, d.h. Antwort 4 ist richtig.

$$\mathbf{M1} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} S & Z1 & W1 & E1 & W2 & E3 & W3 & E2 & W5 & Z2 \end{array} \\ \begin{array}{c} S \\ Z1 \\ W1 \\ E1 \\ W2 \\ E3 \\ W3 \\ E2 \\ W5 \\ Z2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \tag{1}$$