2 Übergangsmatrizen

1 Formulieren Sie eine Spielregel für das Spiel in Fig. 1, zu der das Prozessdiagramm in Fig. 2 passt.

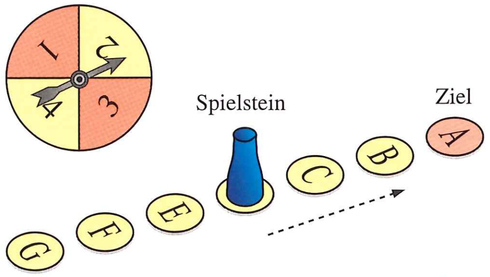


Fig. 1

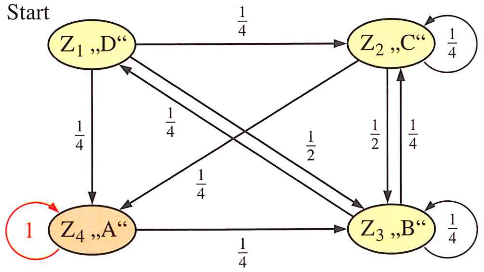


Fig. 2

Man kann die Berechnung von Zustandsverteilungen bei MARKOFF-Ketten sehr einfach mit den Mitteln der linearen Algebra beschreiben. Dies soll an der durch Fig. 2 beschriebenen MARKOFF-Kette verdeutlicht werden.

Wenn die Zustände Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 in Fig. 2 bei einer Beobachtung die Wahrscheinlichkeiten v_1, v_2, v_3, v_4 besitzen, so bestimmt man die Zustandsverteilung bei der nächsten Beobachtung wie in Fig. 3. Schreibt man beide Verteilungen als Spaltenvektoren $\vec{v}'$ und $\vec{v}$ und notiert die Koeffizienten aus Fig. 3 in einer Matrix U, so kann man die Berechnung aus Fig. 3 wie in Fig. 4 schreiben.

$$\begin{aligned} v_1' &= \tfrac{1}{4}v_3 \\ v_2' &= \tfrac{1}{4}v_1 + \tfrac{1}{4}v_2 + \tfrac{1}{4}v_3 \\ v_3' &= \tfrac{1}{2}v_1 + \tfrac{1}{2}v_2 + \tfrac{1}{4}v_3 \\ v_4' &= \tfrac{1}{4}v_1 + \tfrac{1}{4}v_2 + \tfrac{1}{4}v_3 + v_4 \end{aligned}$$

Fig. 3

$$\underbrace{\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \\ v_4' \end{pmatrix}}_{\vec{v}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}}_{U} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}}_{\vec{v}}$$

Fig. 4

Ausgehend von der Startverteilung $\vec{v}_0$ mit $v_1 = 1$, $v_2 = v_3 = v_4 = 0$ kann man mithilfe von U alle Zustandsverteilungen wie in Fig. 5 in der Form $\vec{v}_1 = U \cdot \vec{v}_0$, $\vec{v}_2 = U \cdot \vec{v}_1$, … bestimmen.

$$\vec{v}_1 = U \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = U \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{3}{16} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{7}{16} \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = U \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{3}{16} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{7}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} \\ \frac{9}{64} \\ \frac{7}{32} \\ \frac{37}{64} \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

Fig. 5

Z_2	Z_3	Z_4	nach
0	$\frac{1}{4}$	0	Z_1
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	Z_2
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	Z_3
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	Z_4

Fig. 6

Definition: Unter der **Übergangsmatrix** U einer Markoff-Kette versteht man die Matrix, bei der in der i-ten Zeile und k-ten Spalte jeweils die Wahrscheinlichkeit u_{ik} für den Übergang vom Zustand k in den Zustand i steht (siehe Fig. 6).
Rechenregel: Ist $\vec{v}$ eine Zustandsverteilung bei einer Beobachtung, so ist $\vec{v}' = U \cdot \vec{v}$ die Zustandsverteilung bei der nächsten Beobachtung.

Aus der Definition ergeben sich drei Eigenschaften der Übergangsmatrix.

Zur Erinnerung:
„Matrix mal Vektor“:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & & & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \;\; a_{i2} \;\; \ldots \;\; a_{ik}} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

$a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \ldots + a_{ik} \cdot x_k$

„Matrix mal Matrix“:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ \vdots & & & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \;\; a_{i2} \;\; \ldots \;\; a_{ir}} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nr} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1k} & \ldots & b_{1s} \\ b_{21} & \ldots & b_{2k} & \ldots & b_{2s} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \ldots & b_{rk} & \ldots & b_{rs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1k} & \ldots & c_{1s} \\ \vdots & & & & \vdots \\ c_{i1} & \ldots & c_{ik} & \ldots & c_{is} \\ \vdots & & & & \vdots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nk} & \ldots & c_{ns} \end{pmatrix}$$

$a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \ldots + a_{ir} \cdot b_{rk}$

1. U ist stets quadratisch.
2. In der k-ten Spalte stehen die Wahrscheinlichkeiten, mit denen man vom k-ten Zustand aus die übrigen Zustände erreicht.
3. Die Spaltensummen von U haben den Wert 1.

Beispiel 1: (Übergangsmatrix aufstellen)
Eine MARKOFF-Kette wird durch folgendes Prozessdiagramm beschrieben:

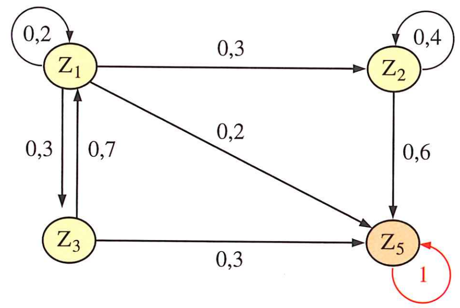


Fig. 1

Als Startzustand wird 1 gewählt.
a) Geben Sie die Übergangsmatrix U an.
b) Bestimmen Sie die Zustandsverteilung $\vec{v}_2$.

Lösung:

a) $U = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0{,}3 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}3 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{v}_1 = U \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}3 \\ 0{,}3 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$, $\quad \vec{v}_2 = U \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}18 \\ 0{,}06 \\ 0{,}51 \end{pmatrix}$

Beispiel 2: (Produkt von Übergangsmatrizen)
Ein Kunde wechselt beim Einkauf zwischen den Supermärkten AKauf, BKauf und CKauf mit den Übergangswahrscheinlichkeiten in Fig. 2.
Er hat gerade bei BKauf eingekauft.
a) Stellen Sie die Übergangsmatrix U für den nächsten Einkauf auf und berechnen Sie damit die Zustandsverteilungen $\vec{v}_1$ beim nächsten und $\vec{v}_2$ beim übernächsten Einkauf.
b) Bestimmen Sie die Matrix $U^2 = U \cdot U$ und rechnen Sie nach, dass $\vec{v}_2 = U^2 \cdot \vec{v}_0$ gilt.

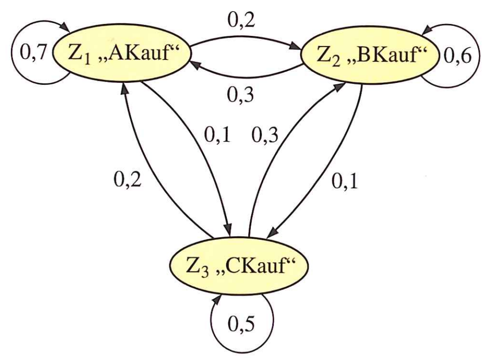


Fig. 2

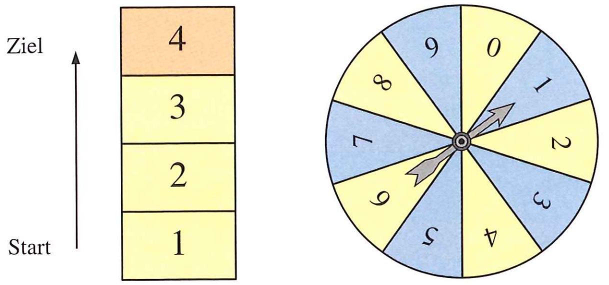
Lösung:

a) $U = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$, $\quad \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad \vec{v}_1 = U \cdot \vec{s} = \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}6 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$, $\quad \vec{v}_2 = U \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}41 \\ 0{,}45 \\ 0{,}14 \end{pmatrix}$.

b) $U^2 = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}57 & 0{,}41 & 0{,}33 \\ 0{,}29 & 0{,}45 & 0{,}37 \\ 0{,}14 & 0{,}14 & 0{,}30 \end{pmatrix}$, $\quad U^2 \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}57 & 0{,}41 & 0{,}33 \\ 0{,}29 & 0{,}45 & 0{,}37 \\ 0{,}14 & 0{,}14 & 0{,}30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}41 \\ 0{,}45 \\ 0{,}14 \end{pmatrix}$.

Aufgaben

2 Bei dem Spiel in Fig. 1 fängt man auf Platz 1 an und hört nach dem Erreichen von Platz 4 auf.
a) Zeichnen Sie ein Prozessdiagramm und stellen Sie die Übergangsmatrix für das Spiel auf.
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die Plätze 1, 2, 3 und 4 nach drei Drehungen.



Regeln:
1. Je Spieldurchgang 1× drehen.
2. Um gezeigte Zahl weiterrücken, wenn diese klein genug ist.
3. Sitzen bleiben, wenn die gezeigte Zahl zu groß ist.

Fig. 1

3 Fig. 2 beschreibt, wie ein schusseliger Wohnungsbesitzer an der Haustür in seinem Schlüsselbund mit fünf gleich aussehenden Schlüsseln herumwühlt und probiert, ob er aufschließen kann.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit reichen höchstens drei Versuche, wenn er als ersten Schlüssel den in Fig. 2 mit Nummer 2 bezeichneten erwischt?

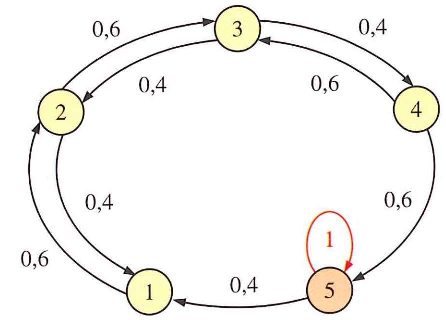


Fig. 2

4 Bei der in Fig. 3 beschriebenen MARKOFF-Kette wird Z_1 als Anfangszustand gewählt.
Stellen Sie die Übergangsmatrix U auf und bestimmen Sie damit die Zustandsverteilung für die vierte folgende Beobachtung.

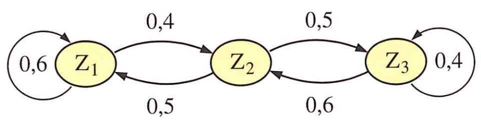


Fig. 3

5 Ein System ist nach jeder Minute in einem der Zustände ①, ②, ③ oder ④. Fig. 4 zeigt die zugehörige Übergangsmatrix U.
a) Zeichnen Sie ein Prozessdiagramm, das die MARKOFF-Kette beschreibt.
b) Am Anfang ist das System in Zustand ①. Berechnen Sie die Zustandsverteilung nach zwei Minuten.
c) Bestimmen Sie die Übergangsmatrix für Beobachtungen in 2-Minuten-Abständen.

$$U = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

Fig. 4

6 Ein System besitzt die Übergangsmatrix U in Fig. 5 für Beobachtungen in Minutenabständen. Bestimmen Sie die Übergangsmatrizen für Beobachtungen im Abstand von
a) 2 Minuten, b) 3 Minuten, c) 4 Minuten.

$$U = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

Fig. 5

3 Absorptionswahrscheinlichkeiten

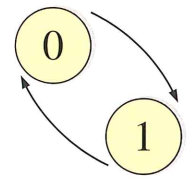


Fig. 1

*MARKOFF-Ketten heißen **absorbierend**, wenn sie mindestens einen absorbierenden Zustand besitzen und jeder absorbierende Zustand von jedem inneren Zustand aus erreichbar ist.*

1 Jasmin und Sascha werfen einen Chip mit den Ziffern 0 auf der Vorderseite und 1 auf der Rückseite. Jasmin gewinnt, wenn das Muster 010 zuerst kommt, Sascha gewinnt bei 111.
a) Wie schätzen Sie die Gewinnchancen von Jasmin und Sascha ein?
b) Überprüfen Sie Ihre Vermutung experimentell.

Bei MARKOFF-Ketten mit mehreren möglichen Endzuständen interessiert man sich für die Wahrscheinlichkeiten, bestimmte Endzustände zu erreichen. Die Endzustände nennt man **absorbierend**, die anderen Zustände heißen **innere** Zustände. Wie man die Wahrscheinlichkeiten berechnet, mit denen man irgendwann einen absorbierenden Zustand erreicht, wird an einem Spiel verdeutlicht.

Bei einem Glücksspiel setzt man einen Betrag. Dann wird eine Münze geworfen. Der eingesetzte Betrag verdoppelt sich, wenn „Zahl" fällt, bei „Wappen" ist er verloren.
Ein Spieler hat einen Euro und braucht drei Euro. Er setzt den Euro. Mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ verliert er ihn und das Spiel ist zu Ende. Ansonsten hat er 2 €, von denen er wieder einen setzt. Bei „Gewinn" hat er sein Ziel erreicht, andernfalls beginnt er mit 1 € von vorne …

Prozessdiagramm:

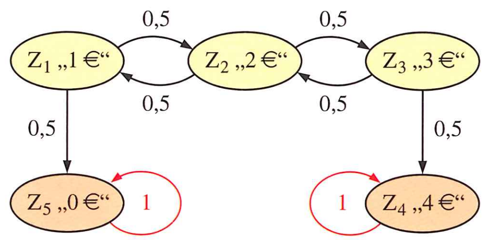


Fig. 2

Verteilungsübergang:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \\ v_4' \\ v_5' \end{pmatrix}}_{\vec{v}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix}}_{\vec{v}}$$

Fig. 3

Z_4 (4 €) und Z_5 (0 €) sind die absorbierenden, Z_1 (1 €), Z_2 (2 €) und Z_3 (3 €) die inneren Zustände.

Näherungsverfahren (Iteration):
Um eine Vermutung über die Gewinnwahrscheinlichkeit zu bekommen, kann man sich die Entwicklung der Zustandsverteilungen ansehen.
Da der Spieler im Zustand Z_1 beginnt, ist $\vec{v}_0$ mit $v_1 = 1$, $v_2 = v_3 = v_4 = 0$ die Startverteilung.
Mithilfe von Fig. 3 erhält man nacheinander die folgenden Verteilungen $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots$:

Ein Excel-Arbeitsblatt mit dem Namen iteration.xls kann bei www.klett-verlag.de heruntergeladen werden.

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0 \\ 0{,}25 \\ 0 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}25 \\ 0 \\ 0{,}125 \\ 0{,}625 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \vec{v}_{20} \approx \begin{pmatrix} 0{,}0004\ldots \\ 0{,}0000\ldots \\ 0{,}0004\ldots \\ 0{,}2495\ldots \\ 0{,}7495\ldots \end{pmatrix}$$

Dies legt die Vermutung nahe, dass der Spieler mit der Wahrscheinlichkeit 0,75 seinen Euro verliert und mit der Wahrscheinlichkeit 0,25 die 4 € erreicht.

Gleichungs-Verfahren (Mittelwertsregel):
Man fügt im Prozessdiagramm zusätzliche Pfeile von allen inneren Zuständen zum absorbierenden Zustand Z_4 (Gewinn) ein. An jedem Pfeil wird ein Name für die Wahrscheinlichkeit eingetragen, „irgendwann" zu gewinnen, wenn man am Pfeilanfang startet.

*kung: Wenn in Pro-
grammen „Kreis-
oder Schleifen bei
Zuständen vor-
, kann es beliebig
Wege bis zu einem
and geben. Da die
aller Pfadwahr-
chkeiten in solchen
mmer als Grenz-
stiert, darf man die
eln auch auf die
feile in Fig. 1 an-*

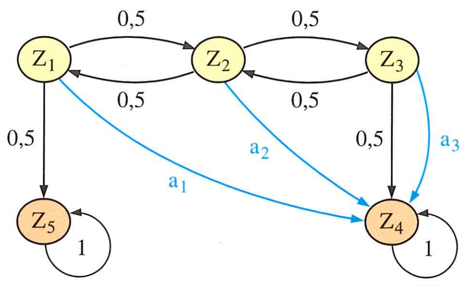


Fig. 1

In Fig. 1 sind a_1, a_2, a_3 die Wahrscheinlichkeiten, von den einzelnen Zuständen aus irgendwann zu gewinnen. Man bestimmt a_1, a_2, a_3 durch Lösen des folgenden LGS:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0{,}5\,a_2 && (1)\\ a_2 &= 0{,}5\,a_1 + 0{,}5\,a_3 && (2)\\ a_3 &= 0{,}5\,a_2 + 0{,}5 && (3) \end{aligned}$$

Es ergeben sich $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{3}{4}$.

Dem LGS liegt eine „Mittelwertsregel“ zu Grunde, die an Gleichung (2) erläutert werden soll: Will man von Z_2 aus gewinnen, so schafft man das jeweils mit der Wahrscheinlichkeit 0,5 auf dem Weg über Z_1 oder Z_3.
Von diesen Zuständen aus gewinnt man mit den Wahrscheinlichkeiten a_1 bzw. a_3.
Also ist nach der Pfadregel a_2 gleich dem mit den Übergangswahrscheinlichkeiten $u_{21} = 0{,}5$ und $u_{31} = 0{,}5$ „gewichteten“ Mittelwert der Gewinnwahrscheinlichkeiten a_1 und a_3. Nichts Anderes besagt Gleichung (2).
Die Gleichungen (1) und (3) begründet man analog.

Allgemein gilt:

*er“ mit Weglassen
lsummanden:
absorbierenden
F-Kette ist die Ab-
swahrscheinlich-
s inneren Zustands
em gewichteten
er Absorptions-
einlichkeiten
nmittelbaren Nach-*

1. Mittelwertsregel: Gegeben ist eine absorbierende Markoff-Kette mit n Zuständen Z_1 bis Z_n und der Übergangsmatrix U. Ist Z_k ein absorbierender Zustand, so ist die zugehörige Absorptionswahrscheinlichkeit a_i jedes inneren Zustands Z_i gleich $a_1 \cdot u_{1i} + a_2 \cdot u_{2i} + \ldots + a_n \cdot u_{ni}$.
Dabei ist $a_k = 1$ zu setzen. Für von Z_k verschiedene absorbierende Zusätze Z_r ist $a_r = 0$ zu setzen.

Beispiel:
Fig. 2 zeigt das Prozessdiagramm einer absorbierenden MARKOFF-Kette. Notieren Sie die Übergangsmatrix U und bestimmen Sie die Absorptionswahrscheinlichkeiten a_1 (Absorption in Z_4) und b_1 (Absorption in Z_5) für den Start in Z_1
a) mit dem Iterationsverfahren
b) mit der 1. Mittelwertsregel.

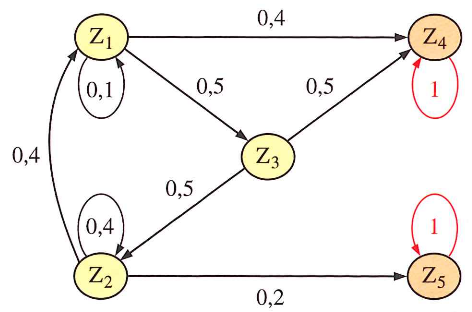


Fig. 2

Lösung:

*n wieder mit dem
latt Iteration.xls
em CAS gearbeitet*

Übergangsmatrix: $U = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}5 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Folge der Zustandsverteilungen:

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix},\quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}1\\0\\0{,}5\\0{,}4\\0 \end{pmatrix},\quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}01\\0{,}25\\0{,}05\\0{,}69\\0 \end{pmatrix},\quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0{,}101\\0{,}125\\0{,}005\\0{,}710\\0{,}050 \end{pmatrix},\quad \ldots\quad \vec{v}_{15} \approx \begin{pmatrix} 0{,}000\ldots\\0{,}000\ldots\\0{,}000\ldots\\0{,}885\ldots\\0{,}113\ldots \end{pmatrix}$$

Also: $a_4 \approx 0{,}886$ und $a_5 \approx 0{,}114$.

b)

Gleichungen nach der 1. Mittelwertsregel:	LGS in Standardform:
$a_1 = 0{,}1\,a_1 + 0 \cdot a_2 + 0{,}5\,a_3 + 0{,}4 \cdot 1$	$0{,}9\,a_1 - 0{,}5\,a_3 = 0{,}4$
$a_2 = 0{,}4\,a_1 + 0{,}4\,a_2$	$-0{,}4\,a_1 + 0{,}6\,a_2 = 0$
$a_3 = 0 \cdot a_1 + 0{,}5\,a_2 + 0{,}5 \cdot 1$	$-0{,}5\,a_2 + a_3 = 0{,}5$
$b_1 = 0{,}1\,b_1 + 0 \cdot b_2 + 0{,}5\,b_3$	$0{,}9\,b_1 - 0{,}5\,b_3 = 0$
$b_2 = 0{,}4\,b_1 + 0{,}4\,b_2 + 0{,}2 \cdot 1$	$-0{,}4\,b_1 + 0{,}6\,b_2 = 0{,}2$
$b_3 = 0 \cdot b_1 + 0{,}5\,b_2$	$-0{,}5\,b_2 + b_3 = 0$

Die Werte in a) für a_1 und b_1 sind also nur Näherungen!

Lösungen sind $a_1 = \frac{39}{44}$, $a_2 = \frac{13}{22}$, $a_3 = \frac{35}{44}$ und $b_1 = \frac{5}{44}$, $b_2 = \frac{9}{22}$, $b_3 = \frac{9}{44}$.

Aufgaben

2 Bei einem Spiel setzt man 1 € und darf einen Spielwürfel werfen. Bei den Augenzahlen 1 und 2 erhält man 2 € dazu, ansonsten ist der Einsatz weg. Lässt man den Betrag stehen, so erhält man bei einer gewürfelten 1 oder 2 wieder nur 2 € dazu und muss aufhören. Ansonsten fällt man auf seinen Starteinsatz zurück und kann weitermachen (Fig. 1).
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit nur 1 € Anfangseinsatz 5 € zu erreichen.

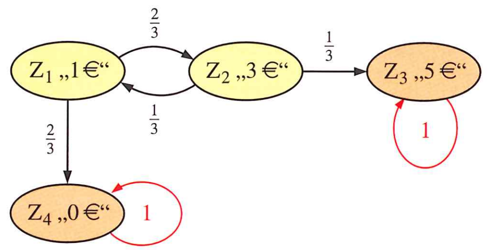


Fig. 1

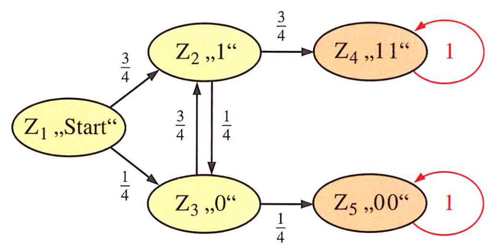


Fig. 2

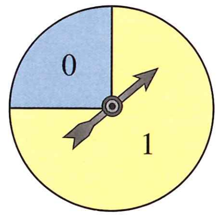


Fig. 3

3 Das Glücksrad aus Fig. 3 wird so lange gedreht, bis das erste Mal zwei Einsen („11“) oder zwei Nullen („00“) hintereinander aufgetreten sind. Fig. 2 zeigt das Prozessdiagramm.
Geben Sie die Übergangsmatrix der MARKOFF-Kette an und bestimmen Sie die Absorptionswahrscheinlichkeiten a_1 und b_1 bezüglich Z_4 und Z_5
a) mit dem Iterationsverfahren b) mit der 1. Mittelwertsregel.

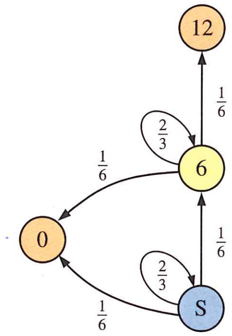


Fig. 4

4 Bei dem Spiel „Die böse 3“ wird reihum gewürfelt und jeder fängt mit 0 Punkten an. Ist man an der Reihe, so kann man so lange würfeln, wie dabei keine 3 fällt. Für jede 6 werden sechs Punkte gut geschrieben, die man beim Weiterwürfeln stehen lassen muss und nur bei rechtzeitigem Aufhören erhält. Bei 1, 2, 4 und 5 ändert sich der Punktestand nicht, bei einer 3 verfällt jedoch das Punktekonto und der Nächste erhält den Würfel.
Ein Spieler hat herausgefunden, dass man spätestens beim Punktestand 12 aufhören sollte und hält sich daran (Fig. 4). Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, von S aus 12 Punkte zu erreichen.

5 Ein Teilchen startet in Fig. 5 von der Quadratzelle 0 aus. Es wechselt jede Minute zufällig von seiner jeweiligen Zelle in eine der Nachbarzellen. Wenn es eine der roten Randzellen reicht, wird es absorbiert. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten, mit denen das Teilchen in 15 bzw. in 16 absorbiert wird.

11	12	13	14	15
10	1	2	3	16
9	8	0	4	17
24	7	6	5	18
23	22	21	20	19

Fig. 5

Zellen, die nur an einer Ecke zusammenstoßen, gelten nicht als benachbart.

4 Mittlere Wartezeiten

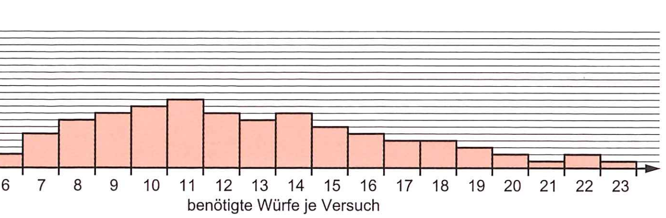


Fig. 1

1 Bilden Sie Zweierteams. Lassen Sie jedes Team folgenden Versuch 5-mal durchführen und fassen Sie alle Resultate in einer Grafik wie in Fig. 1 zusammen:
Ein Würfel wird so lange geworfen, bis zum ersten Mal alle Augenzahlen von 1 bis 6 aufgetreten sind. Notiert wird die Anzahl der dazu nötigen Würfe.

*…lt sich bei der … Schrittzahl m_i um …nannten **Erwar-**…**t** der Schrittzahl … bis zum Rand. Zu …egriff vgl. S. 26.*

Bei absorbierenden MARKOFF-Ketten interessiert neben den schon behandelten Absorptionswahrscheinlichkeiten auch die „mittlere Schrittzahl" m_i auf dem Weg von einem inneren Zustand Z_i bis zur Absorption.
Man nennt m_i eine **mittlere Wartezeit** und bezeichnet die Menge aller absorbierenden Zustände als den **Rand** der MARKOFF-Kette. Folgende Situation zeigt, wie man mittlere Wartezeiten bestimmt:

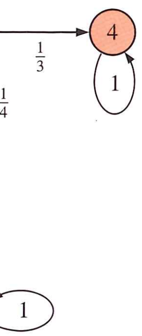


Fig. 2

Für die absorbierende MARKOFF-Kette in Fig. 2 ist m_1 die mittlere Schrittzahl von ① bis zum Rand und m_2 die mittlere Schrittzahl von ② bis zum Rand. Da man in rund der Hälfte aller Fälle direkt von ① aus zum Rand kommt und in der anderen Hälfte über ② zum Rand kommt, ist die mittlere Schrittzahl m_1 von ① aus gleich $\frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{2}{3}\cdot(1+m_2) = 1 + \frac{2}{3}m_2$. Entsprechend ergibt sich für die mittlere Schrittzahl m_2 von ② aus zum Rand die Gleichung $m_2 = \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{3}{4}(1+m_1) = 1 + \frac{3}{4}m_1$.
Also sind die mittleren Wartezeiten $m_1 = \frac{10}{3}$ und $m_2 = \frac{7}{2}$.

Diese Argumentation ist auf alle absorbierenden MARKOFF-Ketten übertragbar und es gilt:

Satz (2. Mittelwertsregel): In einer absorbierenden MARKOFF-Kette mit n Zuständen und der Übergangsmatrix U gilt für die mittlere Wartezeit m_i in Schritten von einem inneren Zustand Z_i bis zur Absorption im Rand: $\mathbf{m_i = 1 + m_1 \cdot u_{1i} + m_2 \cdot u_{2i} + \ldots + m_n \cdot u_{ni}}$.
Dabei ist $m_k = 0$ für alle absorbierenden Zustände Z_k zu setzen.

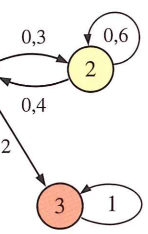


Fig. 3

Beispiel:
Eine MARKOFF-Kette wird durch das Prozessdiagramm in Fig. 3 beschrieben. Berechnen Sie die mittleren Wartezeiten m_1 und m_2 bis zur Absorption für die Zustände ① und ②. Zeichnen Sie dazu das Prozessdiagramm mit mittleren Wartezeiten an Stelle der Zustandsbezeichnungen.
Lösung:
Prozessdiagramm:

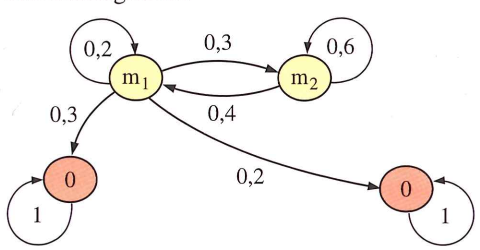


Fig. 4

In Fig. 4 liefert die 2. Mittelwertsregel:
$m_1 = 1 + 0{,}4\cdot m_1 + 0{,}3\cdot m_2$
$m_2 = 1 + 0{,}3\cdot m_1 + 0{,}7\cdot m_2$

LGS:
$0{,}6\,m_1 - 0{,}3\,m_2 = 1$
$-0{,}3\,m_1 + 0{,}3\,m_2 = 1$

Daraus ergeben sich $m_1 = \frac{20}{3}$ und $m_2 = 10$.

Aufgaben

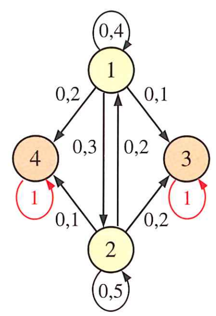


Fig. 1

2 Das Prozessdiagramm in Fig. 1 beschreibt eine MARKOFF-Kette. Bestimmen Sie mithilfe der zweiten Mittelwertsregel die mittlere Wartezeiten m_1 und m_2 bis zur Absorption beim Start im Zustand ① bzw. ②. Zeichnen Sie dazu das Prozessdiagramm mit mittleren Wartezeiten an Stelle der Zustandsbezeichnungen.

3 Eine MARKOFF-Kette besitzt die Übergangsmatrix U in Fig. 2 für die Zustände Z_1 bis Z_5.
a) Zeichnen Sie ein Prozessdiagramm.
b) Bestimmen Sie mit der 2. Mittelwertsregel die mittleren Wartezeiten m_1 bis m_3.

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fig. 2

4 Bei einem Computerspiel gibt es die Zustände („Spielstufen") 1 bis 7, die man nur nacheinander erreichen kann. Nehmen Sie an, dass Neulinge auf der ersten Spielstufe beginnen und die Übergangswahrscheinlichkeiten in Fig. 3 für die Stufen besitzen. Wie viele Spiele benötigt ein Neuling durchschnittlich bis zum Erreichen der letzten Stufe?

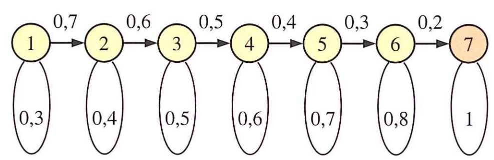


Fig. 3

5 Zu dem Spiel in Aufgabe 1 gibt es ein Excel-Arbeitsblatt mit dem Namen vollständigeserie.xls, mit dem sich die Verteilung der Spieldauer beim Würfeln bis zum ersten Auftreten aller sechs Augenzahlen bestimmen lässt.
a) Laden Sie das Arbeitsblatt und lesen Sie in der Excel-Hilfe nach, wie man Matrizen in Excel multipliziert. Prüfen Sie nach, dass in den Zellen E14 bis AI19 die Spieldauerverteilungen bei maximal 1, 2, 3, …, 31 Würfen bestimmt werden.
b) Wie groß ist die erwartete Spieldauer bei dem Spiel mindestens?
c) Übertragen Sie die Übergangsmatrix ins Heft und bestimmen Sie die mittlere Spieldauer mithilfe der 2. Mittelwertsregel.

6 (Irrfahrt auf dem Tetraedernetz)
Ein Teilchen startet auf dem Netz in Fig. 4 von 1 aus und braucht von einem Knoten zum nächsten immer 1 Minute. An jedem Knoten wählt es zufällig die nächste Richtung (auch rückwärts!), in 4 wird es absorbiert.
Bestimmen Sie die mittlere Zeitdauer m_1 vom Start des Teilchens bis zu seiner Absorption.

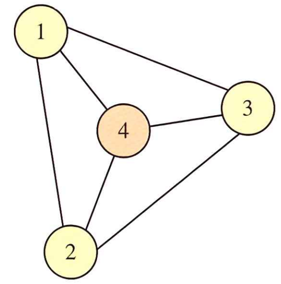


Fig. 4

Hinweis zu Aufgabe 7: Zellen, die nur an einer Ecke zusammenstoßen, gelten nicht als benachbart!

7 (Irrfahrt im Quadratgitter)
Ein Teilchen startet in Fig. 5 von der Quadratzelle 1 aus und wechselt jede Minute zufällig von der letzten Zelle in eine der Nachbarzellen. Wenn es eine der roten Randzellen erreicht, wird es absorbiert.
Bestimmen Sie die mittlere Lebensdauer vom Start des Teilchens bis zu seiner Absorption.

25	10	11	12	13
24	9	2	3	14
23	8	1	4	15
22	7	6	5	16
21	20	19	18	17

Fig. 5

5 Wenn MARKOFF den Computer nutzt – die Fundamentalmatrix

1 Auf einem Tisch liegen vier Münzen, von denen eine „Wappen“ zeigt. Jede Sekunde wird eine Münze zufällig gewählt und gewendet. Formulieren Sie eine Aufgabenstellung zu diesem Experiment, die zu dem Prozessdiagramm aus Fig. 1 passt.

Wenn man bei absorbierenden MARKOFF-Ketten die Gleichungssysteme zur Berechnung von mittleren Wartezeiten und Absorptionswahrscheinlichkeiten in Matrizenform schreibt, eröffnen sich überraschende Zusammenhänge mit der Übergangsmatrix. Darüber hinaus lassen sich aufwändige Berechnungen mit Tabellenkalkulation oder CAS automatisieren.
Das soll anhand des Prozessdiagramms aus Fig. 1 erläutert werden.

…orbierenden Zu- …erhalten die höchs- …mmern, damit die …rigen Zeilen in der …ngsmatrix „unten“

Prozessdiagramm:

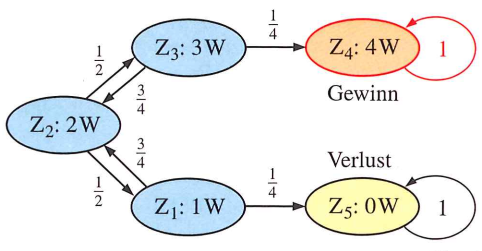


Fig. 1

Übergangsmatrix:

$$U = \begin{array}{c} \text{von} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} Z_1\ Z_2\ Z_3\ Z_4\ Z_5 \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \text{nach} \\ Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \end{array}$$

Fig. 2

…ansponiert eine … indem man die …als Spalten schreibt.

Absorptionswahrscheinlichkeiten (Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeiten)
Für die Wahrscheinlichkeiten $g_1, \dots, g_3$, von den inneren Zuständen $Z_1 \dots Z_3$ aus im Zustand Z_4 („Gewinn“) absorbiert zu werden, also zu gewinnen, gilt nach der 1. Mittelwertsregel:

Lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} g_1 &= \tfrac{3}{4}\cdot g_2 \\ g_2 &= \tfrac{1}{2}\cdot g_1 + \tfrac{1}{2}\cdot g_3 \\ g_3 &= \tfrac{3}{4}\cdot g_2 + \tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

in Matrizenschreibweise

$$\underbrace{\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}}_{\vec{g}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}}_{Q} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}}_{\vec{g}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}}_{\vec{a}_g}$$

in Kurzform

$$\vec{g} = Q\cdot\vec{g} + \vec{a}_g$$

$\begin{bmatrix} \dots & \frac{3}{4} & 0 \\ \dots & 0 & \frac{1}{2} \\ \dots & \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$

…ENTITY_MATRIX(3)−Q)$^{-1}$

$\begin{bmatrix} \dots 3 & \frac{3}{2} \\ \dots 4 & 2 \\ \dots 3 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \dots 0 \\ \dots 0 \\ \dots \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

…ag

Fig. 3

Dabei wurden die „Gewinnwahrscheinlichkeiten“ g_1, g_2, g_3 in einem „Gewinnvektor“ $\vec{g}$ zusammengefasst. Man erkennt, dass in dem LGS Teile der Übergangsmatrix auftreten:
– Die Matrix Q ist der transponierte („gespiegelte“) Teil der Übergangsmatrix, die zu den inneren Zuständen gehört (blau unterlegt).
– Der Vektor $\vec{a}_g$ ist der transponierte Teil der Übergangsmatrix, der die Absorption im Gewinnzustand beschreibt (in der Matrix U rot unterlegt).
Man bezeichnet ihn daher kurz als Absorptionsvektor.

Die Lösung des LGS erhält man in vektorieller Schreibweise wie folgt:
$\vec{g} = Q\cdot\vec{g} + \vec{a}_g$, also $(E - Q)\cdot\vec{g} = \vec{a}_g$ bzw. $\vec{g} = (E - Q)^{-1}\cdot\vec{a}_g$.
Dabei ist E die „passende“ Einheitsmatrix.
Die Matrix $F := (E - Q)^{-1}$ heißt **Fundamentalmatrix** der absorbierenden MARKOFF-Kette.
Wie man dieses LGS mit DERIVE löst, zeigt Fig. 3.
Man gewinnt von Zustand 1 aus mit der Wahrscheinlichkeit $g_1 = \frac{3}{8}$, vom Zustand 2 aus mit $g_2 = \frac{1}{2}$ und vom Zustand 3 aus mit $g_3 = \frac{5}{8}$.

Gegeben ist eine absorbierende MARKOFF-Kette. Die Wahrscheinlichkeiten, dass man von den inneren Zuständen aus in einem bestimmten absorbierenden Zustand G endet, erhält man, indem man den zugehörigen Absorptionsvektor $\vec{a}_g$ mit der Fundamentalmatrix F multipliziert.

Mittlere Wartezeit
Für die mittleren Wartezeiten $m_1, \dots, m_3$, von den inneren Zuständen $Z_1, \dots, Z_3$ aus irgendwann einmal (bei G oder V) absorbiert zu werden, gilt nach der zweiten Mittelwertregel (S. 118):

Lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} m_1 &= \tfrac{3}{4}\cdot m_2 + 1 \\ m_2 &= \tfrac{1}{2}\cdot m_1 + \tfrac{1}{2}\cdot m_3 + 1 \\ m_3 &= \tfrac{3}{4}\cdot m_2 + 1 \end{aligned}$$

in Matrizenschreibweise

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}}_{\vec{m}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}}_{Q} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}}_{\vec{m}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{1}}$$

in Kurzform

$$\vec{m} = Q\cdot\vec{m} + \vec{1}$$

eins: $= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

m: = F · eins

m: $= \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$

Fig. 1

Auch hier werden die mittleren Wartezeiten m_1, m_2, m_3 zu einem Vektor $\vec{m}$ zusammengefasst.
$\vec{1}$ ist der Vektor mit so vielen Einsen, wie es innere Zustände gibt.
Man löst die Gleichung nach $\vec{m}$ auf und erhält $\vec{m} = (E - Q)^{-1}\cdot\vec{1}$.
Die mittleren Wartezeiten sind damit die Zeilensummen der Fundamentalmatrix.
Im genannten Beispiel benötigt man beispielsweise vom Zustand Z_1 aus im Mittel 7 Schritte bis zur Absorption in einem der Zustände Gewinn oder Verlust (vgl. Fig. 1).

Gegeben ist eine absorbierende MARKOFF-Kette. Die zu den inneren Zuständen gehörenden mittleren Wartezeiten bis zur Absorption sind die Zeilensummen der Fundamentalmatrix.

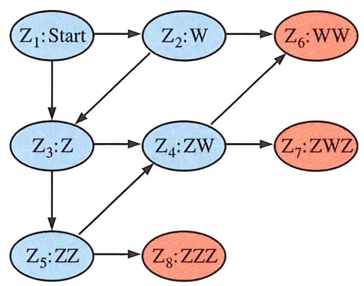


Fig. 2

		von					WW	WZW	ZZZ
	U	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Z6	Z7	Za
n	Z1	0	0	0	0	0	0	0	0
a	Z2	0,5	0	0	0	0	0	0	0
v	Z3	0,5	0,5	0	0	0	0	0	0
h	Z4	0	0	0,5	0	0,5	0	0	0
	Z5	0	0	0,5	0	0	0	0	0
WW	Z6	0	0,5	0	0,5	0	1	0	0
WZW	Z7	0	0	0	0,5	0	0	1	0
ZZZ	Za	0	0	0	0	0,5	0	0	1

Fig. 3

Beispiel: (Matrizenberechnungen in Excel – drei absorbierende Zustände)
Eine Münze wird so lange geworfen, bis eines der Muster WW (A gewinnt), WZW (B gewinnt) oder ZZZ (C gewinnt) erscheint.
a) Berechnen Sie die zugehörigen Gewinnwahrscheinlichkeiten.
b) Wie lange dauert das Spiel im Mittel?

Vektorbefehle:
– Markiere den gesamten Bereich, in dem die Ergebnismatrix stehen soll.
– Tippe den Vektorbefehl ohne geschweifte Klammern ein.
– Drücke zum Abschluss die Tastenkombination „Strg Shift Return“. Dadurch werden die Klammern erzeugt und die Ergebnismatrix wird berechnet.

Lösung:
a) Mithilfe des Vektorbefehls {=MTRANS(…)} transponiert man den blau unterlegten Teil der Übergangsmatrix, der zu den inneren Zuständen $Z_1 \dots Z_5$ gehört. Man erhält die Matrix Q, die man von der Einheitsmatrix subtrahiert. Auf die Differenz $E - Q$ wendet man den Vektorbefehl {=MINV(…)} zur Matrizeninversion an. Es entsteht die Fundamentalmatrix F. Durch Transponieren der rot unterlegten Teile der Übergangsmatrix entstehen die Absorptionsvektoren $\vec{a}_{WW}$, $\vec{a}_{WZW}$, $\vec{a}_{ZZZ}$, die man auch als Spalten einer „Absorptionsmatrix“ A deuten kann. Mithilfe des Vektorbefehls {=MMULT(…;…)} ergeben sich Vektoren $\vec{g}_{WW}$, $\vec{g}_{WZW}$, $\vec{g}_{ZZZ}$ der gesuchten Gewinnwahrscheinlichkeiten.
b) Man addiert die Einträge der Fundamentalmatrix zeilenweise und erhält den Vektor $\vec{m}$ der mittleren Spieldauern (siehe S. 120).

	Q					E-Q					F=(E-Q)^-1					Absorptionsmatrix			Gewinnmatrix				
																a_{ww}	a_{wzw}	a_{zzz}	g_{ww}	g_{kzk}	g_{zzz}	m	
0	0	0,5	0,5	0	0	1	-0,5	-0,5	0	0	1,33	0,67	0,67	0,50	0,33	0	0	0	0,6	0,3	0,2	3,5	1
0	0	0	0,5	0	0	-0,5	1	0	0	0	0,67	1,33	0,33	0,25	0,17	0,5	0	0	0,8	0,1	0,1	2,75	2
0	0	0	0	0,5	0,5	0	0	1	-0,5	-0,5	0,00	0,00	1,00	0,75	0,50	0	0	0	0,4	0,4	0,3	2,25	3
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,5	0,5	0	0,5	0,5	0	1	4
1	0	0	0	0,5	0	0	0	0	-0,5	1	0,00	0,00	0,00	0,50	1,00	0	0	0,5	0,3	0,3	0,5	1,5	5
																Absorptionsvektoren			Gewinnvektoren			mittlere Wartezeiten	

Fig. 1

Aufgaben

…en die Fragestel- …uch für 5, 6, 7 …untersuchen.

2 Auf dem Tisch liegen drei Münzen, die alle „Zahl" zeigen. Jede Sekunde wird eine „zufällige" Münze gewendet, bis wieder alle Münzen mit der gleichen Seite oben liegen. Geschieht dies beim Muster KKK, gewinnen Sie, andernfalls (Muster ZZZ) verlieren Sie.
a) Zeichnen Sie ein Prozessdiagramm mit Übergangswahrscheinlichkeiten.
b) Berechnen Sie mithilfe der Fundamentalmatrix Ihre Gewinnwahrscheinlichkeit.
c) Berechnen Sie die mittlere Wartezeit.
d) Das Spiel soll nur noch beim Muster „KKK" enden. (Bei „ZZZ" macht man einfach weiter.) Wie lange ist die mittlere Spieldauer nun?

3 Eine absorbierende MARKOFF-Kette hat die Übergangsmatrix aus Fig. 2.
a) Zeichnen Sie das zugehörige Prozessdiagramm.
b) Berechnen Sie die Fundamentalmatrix.
c) Berechnen Sie zu jedem inneren Zustand die mittlere Spieldauer bis zur Absorption und die Wahrscheinlichkeiten der Absorption in den beiden absorbierenden Zuständen.
d) Berechnen Sie für Start im Zustand 1 mithilfe der Übergangsmatrix die ersten 10 Zustandsverteilungen. Stellen Sie eine Beziehung zu Ihrer Lösung aus Aufgabenteil c) her.

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}2 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}3 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fig. 2

…sychologischen …ng gibt es zwei ge- …iche Positionen …halten von Ratten … Labyrinth. Die …e geht von folgen- …se aus: ***…rhalten einer …nn durch einen …FF-Prozess model- …rden."*** *Eine Ratte, …ine Verzweigung … entscheidet sich …h mit unveränderli- …hrscheinlichkeiten …n möglichen Weg …e Rückweg, auch …e wiederholt erfah- … dass sie am Ziel …tter findet. …ere Seite vertritt …enthese:* ***…ernprozesse mit …FF-Prozessen iden- … behauptet allen …, dass Lebenwesen …edächtnis lernen … Verhalten nicht – …cht als Folge von … – ändern."*** *…eren sie die unter- …chen Positionen.*

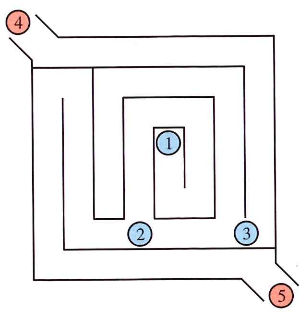


Fig. 3

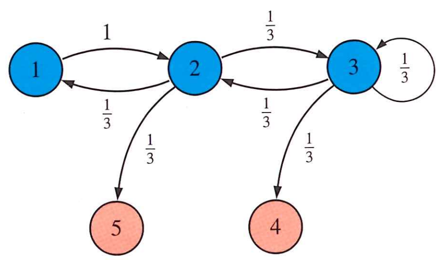


Fig. 4

4 In dem Labyrinth von Fig. 3 entscheidet sich ein Versuchstier an jeder Verzweigung mit gleicher Wahrscheinlichkeit für einen der möglichen Wege zu einer anderen Position. Damit ergibt sich für seinen Irrweg das Prozessdiagramm in Fig. 4.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet das Versuchstier bei Start an Position 1 den Ausgang 4 mit Futter als Belohnung bzw. Ausgang 5 ohne Futter?
b) Wie lange braucht das Versuchstier im Mittel bis zu einem Ausgang, wenn es für den Weg zwischen zwei Verzweigungspunkten jeweils eine Minute braucht?

6 Vermischte Aufgaben

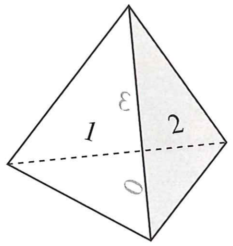


Fig. 1

1 Das Tetraeder in Fig. 1 wird so lange geworfen, bis die Summe der Ergebnisse den Wert 5 überschreitet.
a) Zeichnen Sie ein Prozessdiagramm zu diesem Spiel.
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit braucht man mindestens drei Würfe bis zum Spielende?
c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit braucht man genau drei Würfe bis zum Spielende?

2 Das Prozessdiagramm in Fig. 2 beschreibt eine MARKOFF-Kette. Als Startzustand wird Z_1 gewählt.
a) Stellen Sie die Übergangsmatrix U auf.
b) Bestimmen Sie die Zustandsverteilungen $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ der ersten drei Beobachtungen nach dem Start.

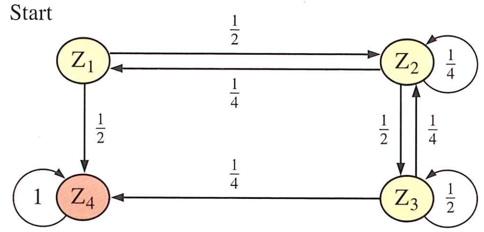


Fig. 2

3 Ein System besitzt die Übergangsmatrix U in Fig. 3 für Beobachtungen in Minutenabständen. Bestimmen Sie die Übergangsmatrizen für Beobachtungen im Abstand von
a) 2 Minuten, b) 3 Minuten.

$$U = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}7 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}7 & 1 \end{pmatrix}$$

Fig. 3

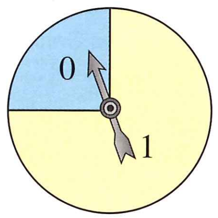


Fig. 4

4 Anja und Cora drehen das Glücksrad aus Fig. 4. Anja gewinnt, wenn dabei das Muster 01 zuerst auftritt, Cora gewinnt beim Muster 111.
a) Zeichnen Sie ein Prozessdiagramm zu dem Spiel und stellen Sie die Übergangsmatrix auf.
b) Bestimmen Sie mithilfe der 1. Mittelwertsregel die Gewinnwahrscheinlichkeiten von Anja und Cora.

Nur Zellen, die gerade Wandstücke gemeinsam haben, gelten als benachbart!

5 Ein Insekt startet in Fig. 5 von der Zelle 0 aus und wechselt jede Minute zufällig von der letzten Zelle in eine der Nachbarzellen. Wenn es eine der roten Randzellen erreicht, bleibt es kleben.
a) Stellen Sie die Übergangsmatrix der MARKOFF-Kette auf.
b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten, mit denen das Insekt jeweils in Zelle 4 bzw. 5 bzw. 6 gefangen wird.

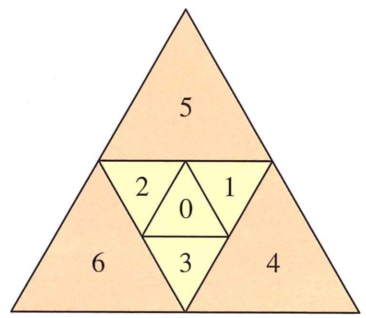


Fig. 5

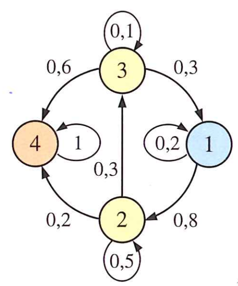


Fig. 6

6 Das Prozessdiagramm in Fig. 6 beschreibt eine MARKOFF-Kette. Bestimmen Sie mithilfe der 2. Mittelwertsregel die mittlere Wartezeit bis zur Absorption beim Start im Zustand ①. Zeichnen Sie dazu das Prozessdiagramm mit mittleren Wartezeiten an Stelle der Zustandsbezeichnungen.

7 Eine MARKOFF-Kette besitzt die Übergangsmatrix U in Fig. 7 für die Zustände Z_1 bis Z_5. Bestimmen Sie mit der 2. Mittelwertsregel die mittleren Wartezeiten m_1 bis m_4 für die inneren Zustände.

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}3 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}$$

Fig. 7

Und wenn es keine Absorption gibt…?

chsel:

onnig

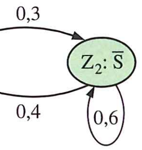


Fig. 1

tscheidung:
bei A
bei B
bei C

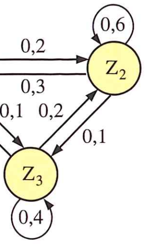
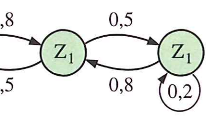


Fig. 2

ge ist ein Satz
Vahrscheinlich-
ie, der sogar mit
er Schulanalysis
r ist. Der Beweis
kompliziert und
g!

diagramm:



Sie mit einem
Matrixpotenzen in
ch und bestimmen
otenzen U^4, U^8

ion bewirkt, dass
zientensumme
Wert 1 hat.

Es gibt Prozesse wie zum Beispiel das Tageswetter oder das Käuferverhalten, die sich durch MARKOFF-Ketten ohne absorbierende Zustände modellieren lassen. In der Realität sind die Übergangswahrscheinlichkeiten bei solchen Prozessen nur selten von Beobachtung zu Beobachtung konstant. Unterstellt man bei der Modellierung konstante Übergangswahrscheinlichkeiten, so lassen sich trotzdem viele Auffälligkeiten bei Beobachtungsserien gut erklären:

Bei dem „Wetterprozess" in Fig. 1 wechselt das Wetter mit den angegebenen Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den Zuständen Z_1 : S und Z_2 : $\bar{S}$. Geht man von einem Sonnentag aus (bei der Anfangsverteilung $\vec{v}_0$ ist also $v_1 = 1$ und $v_2 = 0$), so erhält man für die nachfolgenden Tage die Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Tag	1.	2.	3.	4.	5.	…
v_1	0,7	0,61	0,583	0,5749	0,57247	…
v_2	0,3	0,39	0,417	0,4251	0,42753	…

Beim Weiterrechnen verdichtet sich die Vermutung, dass sich die Verteilung der Grenzverteilung mit $v_1 = \frac{4}{7}$ und $v_2 = \frac{3}{7}$ nähert.

Bei dem „Käuferprozess" in Fig. 2 wechselt ein Kunde monatlich mit den angegebenen Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen drei „Kaufzuständen" Z_1, Z_2 und Z_3. Geht man von einer Anfangsverteilung v_0 mit $v_1 = v_2 = 0{,}3$ und $s_v = 0{,}4$ aus, so erhält man für die nachfolgenden Monate die Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Monat	1.	2.	3.	4.	…
v_1	0,48	0,508	0,518	0,522988	…
v_2	0,36	0,344	0,3376	0,33504	…
v_3	0,16	0,148	0,1444	0,14332	…

Die Verteilung strebt wohl gegen eine Grenzverteilung mit $v_1 = \frac{11}{21}$, $v_2 = \frac{1}{3}$ und $v_3 = \frac{1}{7}$.

Es handelt sich in beiden Fällen um eine Folge von Verteilungen, die man mithilfe der Übergangsmatrix U in der Form $\vec{v}_0 \to U \cdot \vec{v}_0 \to U \cdot (U \cdot \vec{v}_0) = U^2 \cdot \vec{v}_0 \to \ldots$ schreiben kann. Dabei strebt die Matrizenfolge U, U^2, U^3, … gegen eine Grenzmatrix:

> Die Potenz U^k einer Übergangsmatrix U nähert sich mit wachsendem k einer **Grenzmatrix** G, wenn es unter den Matrizen U, U^2, U^3, … eine Matrix U^n mit mindestens einer Zeile gibt, in der keine 0 vorkommt (vgl. Fig. 3). In diesem Fall sind alle Spalten von G gleich und für jede Anfangsverteilung $\vec{v}_0$ ist die Verteilung $\vec{u} = G \cdot \vec{v}_0$ gleich der ersten Spalte von G.

Potenzen der Übergangsmatrix:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \quad U^2 = \begin{pmatrix} \frac{11}{25} & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{25} & \frac{4}{5} & \frac{4}{25} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{10} & \frac{11}{25} \end{pmatrix} \quad U^3 = \begin{pmatrix} \frac{21}{125} & \frac{21}{50} & \frac{4}{25} \\ \frac{84}{125} & \frac{4}{25} & \frac{84}{125} \\ \frac{4}{25} & \frac{21}{50} & \frac{21}{125} \end{pmatrix} \quad \ldots \quad G = \begin{pmatrix} \frac{5}{18} & \frac{5}{18} & \frac{5}{18} \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{5}{18} & \frac{5}{18} & \frac{5}{18} \end{pmatrix}$$

Für $q_1 + q_2 + q_3 = 1$ gilt:

$$G \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{18} & \frac{5}{18} & \frac{5}{18} \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{5}{18} & \frac{5}{18} & \frac{5}{18} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{18}(q_1+q_2+q_3) \\ \frac{4}{9}(q_1+q_2+q_3) \\ \frac{5}{18}(q_1+q_2+q_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{18} \\ \frac{4}{9} \\ \frac{5}{18} \end{pmatrix}$$

Fig. 3

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\vec{u}$ der Systemzustände „an einem sehr weit in der Zukunft liegenden Beobachtungszeitpunkt" hängt also hier nicht von der Anfangsverteilung ab und kann als Lösung der Gleichung $\vec{x} = U \cdot \vec{x}$ bestimmt werden.

Mit der Aussage im Kasten lassen sich die Vermutungen über die Grenzverteilungen des „Wetterprozesses" und des „Käuferprozesses" bestätigen, da in beiden Fällen $\vec{u} = U \cdot \vec{u}$ gilt. Man bestimmt $\vec{u}$, indem man einen Lösungsvektor der Gleichung $\vec{x} = U \cdot \vec{x}$ durch die Summe seiner Koeffizienten dividiert.

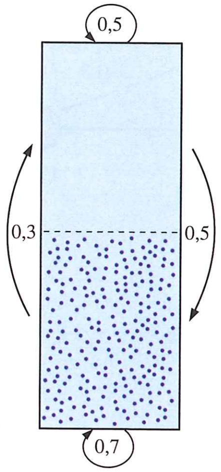


Fig. 1

Die sich ergebende Grenzverteilung $\vec{u}$ nennt man eine **stationäre** Verteilung.
Anwendung finden diese Begriffe hauptsächlich in Fällen, bei denen man dem Verhalten sehr vieler Individuen denselben Prozess unterstellt. Ein typisches Beispiel für diesen Fall ist die **Diffusion**:
Zwei luftgefüllte Kammern (1) und (2) sind durch eine Membran getrennt, die Luftmoleküle in beiden Richtungen frei durchlässt. Die Moleküle eines Duftstoffs S können jedoch nicht beide Richtungen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit passieren. In Kammer (1) befinden sich am Anfang 1 Million Moleküle von S (Fig. 1). Jedem Molekül von S werden die angegebenen Übergangswahrscheinlichkeiten aus Fig. 1 bei Beobachtung in Minutenabständen zugeschrieben.
Dann ist $U = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ die Übergangsmatrix für den Wechsel zwischen (1) und (2).
Für die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten v_1 und v_2 eines Teilchens gilt daher:

t (min)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
v_1	1	0,7	0,64	0,628	0,6256	0,62512	0,625024	0,6250048	0,62500096	…
v_2	0	0,3	0,36	0,372	0,3744	0,37488	0,374976	0,3749952	0,37499904	…

Multipliziert man alle Wahrscheinlichkeiten mit 1 000 000, so erhält man jeweils die ungefähre Anzahl der Moleküle in jeder Kammer. Die Grenzverteilung im Verhältnis 625 000 : 375 000 kann man durch Lösen des LGS mit den Gleichungen $0{,}7\,v_1 + 0{,}5\,v_2 = v_1$ und $0{,}3\,v_1 + 0{,}5\,v_2 = v_2$ absichern.

1 a) Berechnen Sie für das Wetterbeispiel der vorherigen Seite die Zustandswahrscheinlichkeiten p_1 und p_2 für den 6. und 7. Tag.
b) Stellen Sie die Übergangsmatrix auf und bestimmen Sie damit die stationäre Verteilung $\vec{u}$.

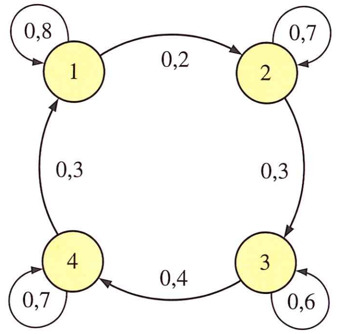


Fig. 2

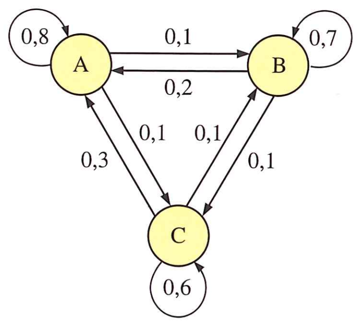


Fig. 3

2 Jedes Molekül eines Gases S wechselt von Minute zu Minute zufällig zwischen vier Schwingungszuständen 1, 2, 3 und 4 wie in dem Prozessdiagramm aus Fig. 2 angegeben.
Stellen Sie die Übergangsmatrix auf und bestimmen Sie eine stationäre Zustandsverteilung.

3 In einem Land mit den Parteien A, B und C wechselt jeder Wähler mit den in Fig. 3 angegebenen Wahrscheinlichkeiten von Wahl zu Wahl die bevorzugte Partei. Mit welchen Stimmenanteilen können die Parteien langfristig rechnen?

4 **„Und wenn es doch Absorption gibt?"**
a) Stellen Sie die Übergangsmatrix U für die durch Fig. 4 beschriebene Markoff-Kette auf und untersuchen Sie, gegen welche Grenzverteilung die Folge $\vec{v}_0$, $\vec{v}_1 = U \cdot \vec{v}_0$, $\vec{v}_2 = U \cdot \vec{v}_1$, … strebt, wenn man in Z_1 bzw. Z_2 startet.
b) Versuchen Sie durch Lösen der Gleichung $\vec{u} = U \cdot \vec{u}$ stationäre Verteilungen zu bestimmen. Was stellen Sie fest?
c) Warum kann hier keine der Potenzen U^k eine Zeile mit ausschließlich positiven Koeffizienten enthalten?

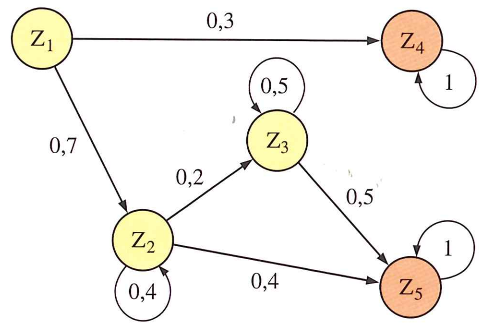


Fig. 4

sdiagramme

elt ein System von Beobachtung zu Beobachtung mit konstanten cheinlichkeiten zwischen endlich vielen möglichen Zuständen, cht man von einer **MARKOFF-Kette**. Die Übergänge stellt man Fig. 1 in einem Prozessdiagramm dar.
noten“ im Diagramm entsprechen den Zuständen und die Pfeile die möglichen Übergänge mit ihren Übergangswahrscheinlich-an.

angsmatrizen

Übergangsmatrix U einer MARKOFF-Kette wird die Übergangs-heinlichkeit u_{ik} von einem Zustand k zu einem Zustand i jeweils -ten Spalte und i-ten Zeile notiert (Fig. 2).
bergangsmatrix ist quadratisch, enthält keine negativen Koeffi- und hat in jeder Spalte die Koeffizientensumme 1.

dsverteilungen

otiert die Wahrscheinlichkeiten $v_1, \dots, v_n$ der Zustände bei einer chtung als Spaltenvektor $\vec{v}$. Dieser Vektor wird **Zustandsvertei-** enannt. Ist $\vec{v}$ die Zustandsverteilung bei einer Beobachtung und Übergangsmatrix, so ist $\vec{v}' = U \cdot \vec{v}$ die Zustandsverteilung bei hsten Beobachtung.

ptionswahrscheinlichkeiten

de, in denen ein System nach dem Erreichen verharrt, nennt man ierend. Alle anderen Zustände heißen innere Zustände.
man einen absorbierenden Zustand Z_k einer (absorbierenden) OFF-Kette heraus, so versteht man unter der **Absorptionswahr-lichkeit** a_i eines Zustands Z_i die Wahrscheinlichkeit, nach dem Z_i irgendwann den Endzustand Z_k zu erreichen. Das für die mung der Absorptionswahrscheinlichkeiten benötigte LGS) ergibt sich aus der

telwertsregel

r absorbierenden MARKOFF-Kette ist die Absorptionswahr-ichkeit eines inneren Zustands gleich dem gewichteten Mittel sorptionswahrscheinlichkeiten seiner unmittelbaren Nachfolger.

re Wartezeiten

r absorbierenden MARKOFF-Kette versteht man für jeden inneren d Z_i unter der mittleren Wartezeit m_i die mittlere Anzahl von en, die man von Z_i aus bis zum Erreichen eines Endzustands t. Das zur Berechnung benötigte LGS (Fig. 4) ergibt sich aus der

telwertsregel

r absorbierenden MARKOFF-Kette ist die mittlere Wartezeit eines n Zustands gleich 1 plus dem gewichteten Mittel der mittleren eiten seiner unmittelbaren Nachfolger.

Ein Prozessdiagramm:

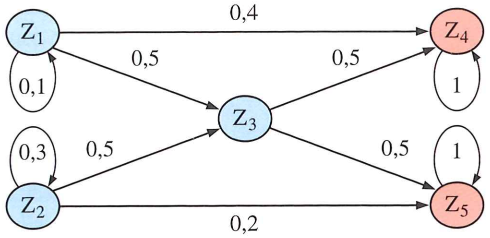


Fig. 1

Übergangsmatrix dazu:

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{von} \\
 & \begin{array}{ccccc} Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 & Z_5 \end{array} \\
\text{nach} \begin{array}{c} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}5 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}5 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Fig. 2

$$
\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \\ v_4' \\ v_5' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}5 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix}
$$

Absorptionswahrscheinlichkeiten zu Z_4:

1. Mittelwertsatz:	*LGS:*
$a_1 = 0{,}1a_1 + 0{,}5a_3 + 0{,}4$	$0{,}9a_1 - 0{,}5a_3 = 0{,}4$
$a_2 = 0{,}3a_2 + 0{,}5a_3$	$0{,}7a_2 - 0{,}5a_3 = 0$
$a_3 = 0{,}5$	$a_3 = 0{,}5$

Fig. 3

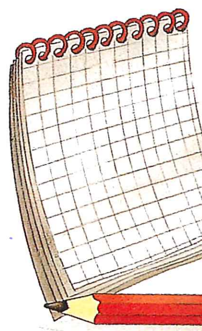
Lösung des LGS:
$a_1 = \frac{13}{18}$; $a_2 = \frac{5}{14}$; $a_3 = \frac{1}{2}$

Mittlere Wartezeiten:

2. Mittelwertsatz:	*LGS*
$m_1 = 1 + 0{,}1m_1 + 0{,}5m_3$	$0{,}9m_1 - 0{,}5m_3 = 1$
$m_2 = 1 + 0{,}3m_2 + 0{,}5m_3$	$0{,}7m_2 - 0{,}5m_3 = 1$
$m_3 = 1$	$m_3 = 1$

Fig. 4

Lösung des LGS:
$m_1 = \frac{5}{3}$; $m_2 = \frac{15}{7}$; $m_3 = 1$



Die Lösungen zu den Aufgaben dieser Seite finden Sie auf Seite 185.

1 Ein Computerspiel hat mit der Eingangsstufe vier Spielstufen. Das Prozessdiagramm in Fig. 1 zeigt, mit welchen Wahrscheinlichkeiten ein Spieler auf einer Stufe bleibt, eine Stufe weiterkommt, oder zurückfällt.
Der Spieler beginnt auf Stufe 0. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten, mit denen der Spieler sich nach vier Spielrunden auf den Stufen 0, 1, 2, 3 befindet.

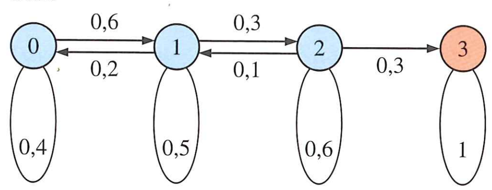


Fig. 1

2 Das Glücksrad in Fig. 2 wird so lange gedreht, bis zum ersten Mal das Muster „111“ aufgetreten ist. Zeichnen Sie ein Prozessdiagramm und bestimmen Sie für die gewählten Zustände die Verteilung nach der vierten Drehung.

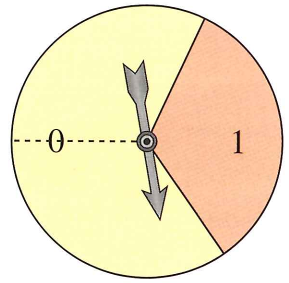


Fig. 2

3 Ein System ist nach jeder Minute in einem der Zustände Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5. Fig. 3 zeigt die Übergangsmatrix U.
a) Zeichnen Sie ein Prozessdiagramm.
b) Am Anfang ist das System im Zustand Z_1. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Systemzustände nach 1, 2 und 3 Minuten.
c) Bestimmen Sie die Übergangsmatrix für Beobachtungen in 2-Minuten-Abständen.

$$
U = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Fig. 3

4 Eine Ameise startet in Fig. 4 von der Zelle 3 aus und wechselt jede Minute zufällig von der letzten Zelle in eine der Nachbarzellen. Wenn sie eine der roten Randzellen erreicht, bleibt sie dort für immer gefangen.
a) Zeichnen Sie ein Prozessdiagramm und stellen Sie die Übergangsmatrix U auf.
b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten, mit denen die Ameise in 1 bzw. in 6 gefangen wird.

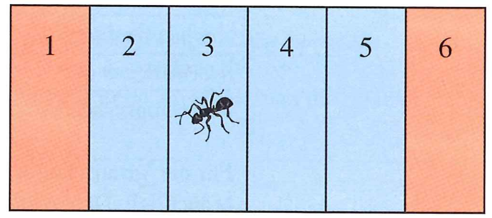


Fig. 4

5 Bestimmen Sie für das Prozessdiagramm in Fig. 5 die Absorptionswahrscheinlichkeiten zum Zustand Z_4 mithilfe der 1. Mittelwertsregel.

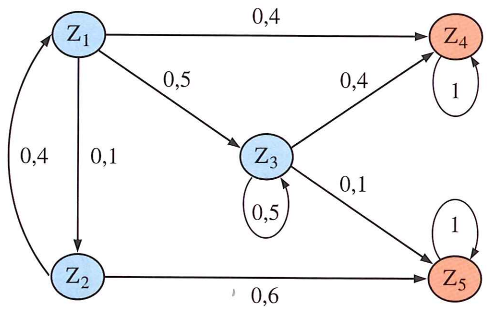


Fig. 5

6 Eine MARKOFF-Kette mit den Zuständen Z_1 bis Z_4 besitzt die Übergangsmatrix U in Fig. 6.
a) Zeichnen Sie ein Prozessdiagramm.
b) Bestimmen Sie mit der zweiten Mittelwertsregel die mittleren Wartezeiten für die inneren Zustände.

$$
U = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 & 1 \end{pmatrix}
$$

Fig. 6