Streik der Geschenkeverpacker

Stephan Schwartz (Zuse Institut Berlin)

Mateon Adventskalender, 9.Dezember 2015

Abbildung 1: Ottokar und Weihnachtsmann

Es ist ein eiskalter Morgen am Nordpol und das Geschenkeverpacken in der Wichteleinheit G sollte auf Hochtouren laufen. Es sollte... Die Wichtel haben die Arbeit jedoch gänzlich niedergelegt, da ihr Vorarbeiter, Oberwichtel Ottokar, die Arbeit schwänzt. Ottokar hat beschlossen, den beschaulichen Morgen im Eisheckenlabyrinth (siehe Abbildung 2) zu verbringen, anstatt zu arbeiten. Der Weihnachtsmann ist alles andere als begeistert, als er von der Arbeitsniederlegung hört. Er muss es schaffen, Ottokar so schnell wie möglich wieder zur Arbeit zu bekommen, denn sonst drohen Geschenke unverpackt ausgeliefert zu werden. Der Weihnachtsmann weiß genau, dass Ottokar es ihm nicht leicht machen wird, weil er sich ohne Pause im Irrgarten bewegt. Von einer Station zu einer benachbarten Station braucht er genau eine Minute. Immer wenn Ottokar an eine Station kommt, so wählt er sofort gleichverteilt unter allen abgehenden Gängen seinen nächsten Gang und läuft weiter. Dabei kann es auch passieren, dass er den gleichen Gang nimmt, aus dem er gekommen ist. Der Weihnachtsmann schaut noch einmal auf seinen Überwachungsmonitor vom Heckenlabyrinth.

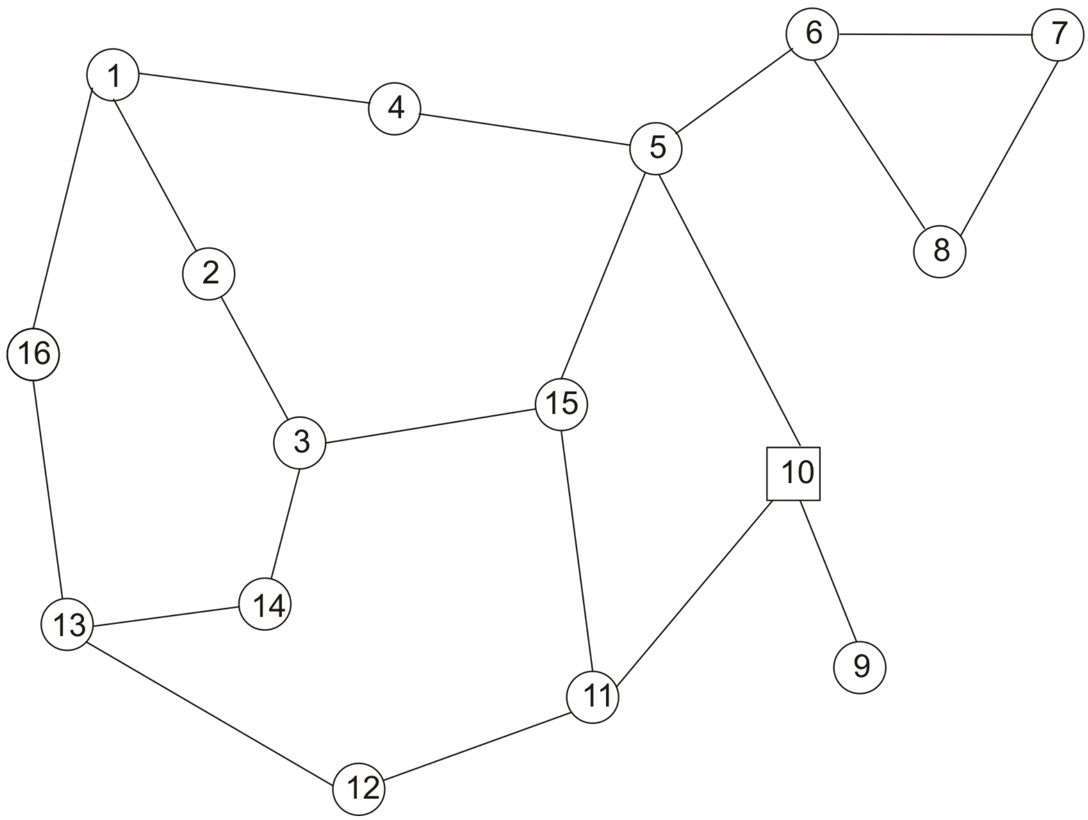

Abbildung 2: Das Eisheckenlabyrinth

Genau! Dort, auf Station Nummer 10, ist Ottokar gerade. Ohne zu zögern macht sich der Weihnachtsmann auf den Weg. 'In meinem Alter werde ich diesem Halunken aber nicht hinterherhetzen. Ich suche mir eine schöne Station und da warte ich dann, dass er dorthin kommt.' denkt er sich. Der Weihnachtsmann benötigt zwei Minuten, bis er sich an eine beliebige Station des Labyrinths gebeamt hat. In diesen zwei Minuten bewegt sich Ottokar natürlich weiter im Labyrinth. Doch wohin sollte sich der Weihnachtsmann beamen, damit er Ottokar möglichst früh antrifft? Genauer gefragt: Welche Aussage über den möglichen Standort des Weihnachtsmanns ist die richtige, wenn es darum geht die erwartete Zeit zu minimieren, bis Ottokar ebenfalls an diese Stelle kommt?

Hinweis: Es kann vorausgesetzt werden, dass die optimale Positionierung des Weihnachtsmanns eindeutig ist. Außerdem sollte ausgenutzt werden, dass genau eine Antwort korrekt ist.

Antwortmöglichkeiten:

1. Die Position 11 ist besser als die Position 15.
2. Die Position 5 ist optimal.
3. Die Position 7 ist besser als die Position 8.
4. Die Position 10 ist optimal.
5. Die Positionen 6 und 4 sind gleich gut.
6. Die Position 4 ist am schlechtesten.
7. Die Position 15 ist besser als die Position 5.
8. Die Position 11 ist optimal.
9. Die Position 5 ist schlechter als die Position 10.
10. Die Position 15 ist optimal.

Projektbezug: In einem laufenden Projekt zwischen dem Zuse Institut Berlin (ZIB) und dem Bundesamt für Güterverkehr (BAG) optimieren wir mit mathematischen Methoden die Mautkontrolle von LKWs auf deutschen Autobahnen. Speziell geht es darum, an welchen Stellen im Autobahnnetz sich ein mobiles Kontrollteam aufhalten sollte, um Mautpreller effizient zu erwischen.

Lösungsvorschlag

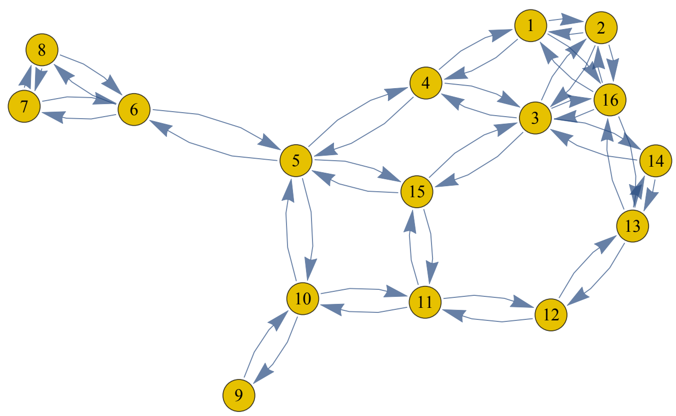

Abbildung 3: Zustandsgraph vom Eisheckenlabyrinth

Die Aufgabenstellung kann mit Hilfe von Markov-Ketten gelöst werden. Dazu wird das Eisheckenlabyrinth als Graph mit den Zuständen $Z = 1..16$ aufgefasst. Entsprechend der Abgänge von einem Zustand (Knoten) zu einem anderen Zustand wird die Übergangsmatrix M aufgestellt. In den Zeilen der Matrix stehen die Wahrscheinlichkeiten mit der ein Wechsel von einem Zustand A in einen Zustand B erfolgt.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix}
0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\
\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\
0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\
\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \qquad (1)$$

Als Nächstes ist zu überlegen, in welchen Startzuständen sich Ottokar befinden kann. Da er zwei Minuten Zeit hat sich von Zustand 10 zu entfernen, sind folgende fünf Starkknoten möglich: $S_i = 4, 6, 10, 12, 15$. Es muss jetzt für jeden Zustand Z die mittlere Laufzeit von den fünf verschiedenen Starknoten S_i bestimmt werden. Die Summe dieser fünf Laufzeiten geteilt durch 5 ergibt dann die mittlere, erwartete Zeit bis Ottokar das erste mal den Zustand Z erreicht. Im CAS Mathematica können wir vorteilhaft den Befelssatz zur Berechnung von Markov-Ketten nutzen:

```
start = {4, 6, 10, 12, 15};
For[j = 1, j < 17, j++, su = 0; s2 = 0; time = {};
For[i = 1, i < 6, i++, proc1 = DiscreteMarkovProcess[start[[i]], M];
If[ start[[i]] == j, s1 = 0,
s1 = Mean[FirstPassageTimeDistribution[proc1, j]]]; su = s1 + s2;
s2 = su; time = Append[time, s1]];
Print[j, "  ", N[time[[1 ]]], "  ", N[time[[2 ]]], "  ",
N[time[[3 ]]], " ", N[time[[4 ]]], "  ", N[time[[5 ]]], " " ,
N[su], "  ", N[su/5]]]
```

Zustand	t(4)	t(6)	t(10)	t(12)	t(15)	Summe	Summe / 5
1	16.733	35.0913	30.3031	26.0036	26.2379	134.369	26.8738
2	20.7068	36.6589	31.1527	25.6695	26.1173	140.305	28.061
3	9.53048	23.8817	18.2687	13.8528	11.8458	77.3795	15.4759
4	0.	23.9762	21.2352	21.5541	18.6933	85.4588	17.0918
5	13.7811	7.	9.17823	18.8505	12.0407	60.8505	12.1701
6	52.7811	0.	48.1782	57.8505	51.0407	209.85	41.9701
7	81.4477	28.6667	76.8449	86.5171	79.7074	353.184	70.6368
8	81.4477	28.6667	76.8449	86.5171	79.7074	353.184	70.6368
9	76.9738	75.112	45.	72.3018	71.3622	340.75	68.15
10	31.9738	30.112	0.	27.3018	26.3622	115.75	23.15
11	26.7471	29.8045	13.4022	12.3337	17.2641	99.5516	19.9103
12	36.8943	44.3858	31.9034	0.	32.3596	145.543	29.1086
13	26.5509	38.4765	29.9139	13.1757	26.9646	135.082	27.0163
14	32.0118	45.1502	38.0624	27.4853	33.3763	176.086	35.2172
15	18.3027	21.8452	15.2329	16.6288	0.	72.0095	14.4019
16	16.6866	31.8334	25.7159	17.9816	21.0977	113.315	22.663

Wir erkennen, das die mittlere Laufzeit für Zustand 5 am kleinsten ist (12.17 Minuten). Somit wäre Knoten 5 die optimalste Position für den Weihnachtsmann, um in möglicht kurzer Zeit Ottokar zu treffen. Die Antwortmöglichkeit 2 ist richtig. Prüft man die anderen Antworten, wird man jeweils auf Widersprüche treffen.

Anmerkung: In der Literatur und im Internet ist dieser Aufgabentyp auch unter *mehrdimensionale Irrfahrt* bekannt.