Verborgene Kegelschnitte

Ingmar Rubin, Berlin

8. Januar 2003

Lehrer *Karl* strapaziert die Gemüter seiner Mathematikschüler heute mit Kegelschnitten. Normalerweise lassen sich diese Gebilde recht anschaulich mit Zirkel und Lineal konstruieren. Bei der vorliegenden Aufgabe rät *Karl* den PC zu Hilfe zu nehmen, andernfalls wird es recht mühselig.

An der Wandtafel hat er zwei Kreise k_1, k_2 mit den Radien r_1 und r_2 gezeichnet. Der Abstand zwischen den Mittelpunkten beträgt $d < r_1 + r_2$, so das sich die beiden Kreislinien in den Punkten A, B schneiden. Zu dem Bild schreibt er den folgenden Aufgabentext :

Zwei gleich schwere Massepunkte P und Q bewegen sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω im gleichen Drehsinn auf k_1 bzw. k_2 . P und Q beginnen ihren Umlauf gleichzeitig in A.

1. Man zeige, daß sich der gemeinsame Schwerpunkt S zwischen P und Q auf einem Kegelschnitt bewegt.
2. Bestimme die Gleichung des Kegelschnittes in Abhängigkeit von r_1, r_2 und d.
3. Für eine bestimmte Konstellation von r_1, r_2 und d entartet der Kegelschnitt zu einem Punkt. Berechne den Radius r_2 in diesem Fall !
4. Wenn Q sich entgegengesetzt zu P bewegt - gleiche Startbedingungen vorausgesetzt - bewegt sich der gemeinsame Schwerpunkt S ebenfalls auf einem Kegelschnitt. Zeichne für $r_1 = 10\,cm, \quad r_2 = 6\,cm$ und $d = 10\,cm$ die Bahnkurve des Schwerpunktes und bestimme seine Gleichung in Paramterdarstellung.

(8 Punkte)

Herleitung der Kegelschnittgleichung bei gleichen Umlaufsinn

Ohne Einschränkung der Aufgabenstellung legen wir den Mittelpunkt vom Kreis k_1 in den Koordinatenursprung O. Der Mittelpunkt M_2 von k_2 befinde sich in der Entfernung $d = \overline{OM_2}, \quad d < (r_1 + r_2)$ auf der $x - Achse$.

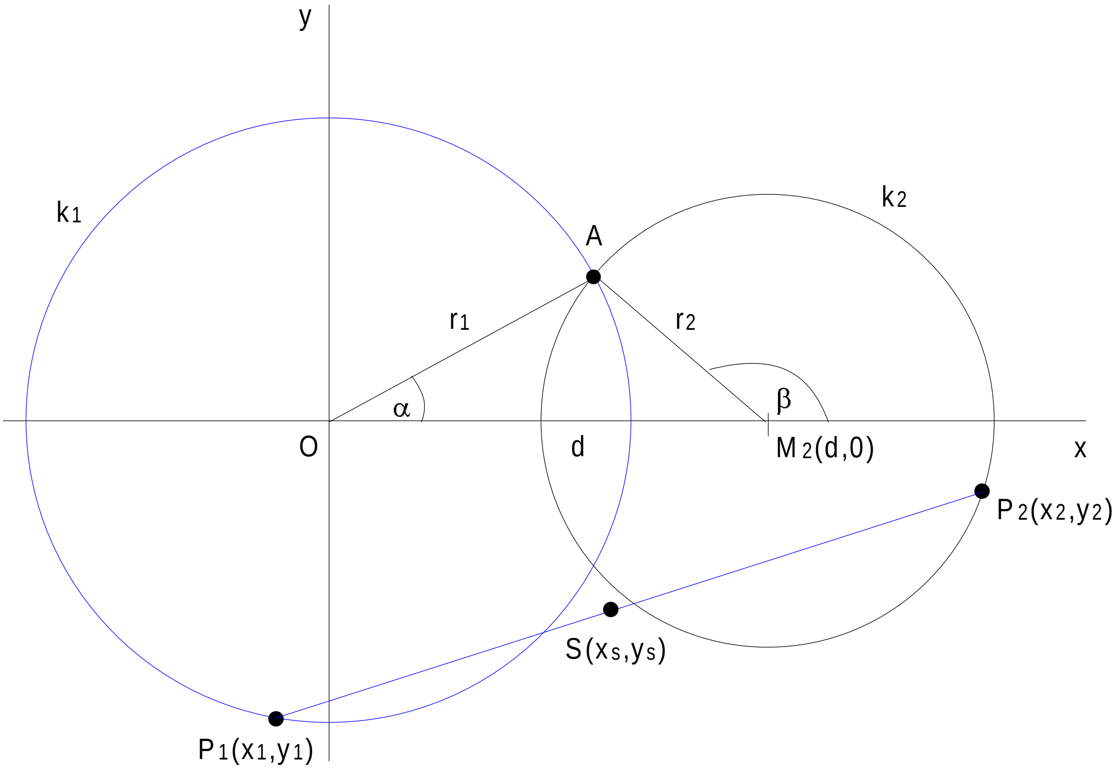

Abbildung 1: Skizze zur Lösung

Mit Hilfe der Kreisgleichung in Parameterdarstellung definieren wir die Bewegungsgleichungen der Punkte $P(x_1, y_1)$ und $Q(x_2, y_2)$

$$P: \qquad x_1 = r_1 \cdot \cos(\omega\, t + \alpha), \qquad y_1 = r_1 \cdot \sin(\omega\, t + \alpha) \tag{1}$$

$$Q: \qquad x_2 = d + r_2 \cdot \cos(\omega\, t + \beta), \qquad y_2 = r_2 \cdot \sin(\omega\, t + \beta) \tag{2}$$

Die Winkel α und β sind die Startwinkel zum Zeitpunkt $t = 0$. Sie können aus den Schnittpunktkoordinaten vom Punkt A bestimmt werden. Die Schnittpunkte A, B zwischen den Kreislinien folgen aus den beiden Kreisgleichungen in kartesischen Koordinaten:

$$k_1: \qquad x^2 + y^2 = {r_1}^2; \qquad k_2: \qquad (x-d)^2 + y^2 = {r_2}^2 \tag{3}$$

Beide Gleichungen werden in *Mathematica* gelöst: `FullSimplifySolve[[{k1,k2},{x,y}]]`

$$x_A = \frac{d^2 + {r_1}^2 - {r_2}^2}{2d}, \qquad y_A = \sqrt{{r_1}^2 - \frac{\left(d^2 + {r_1}^2 - {r_2}^2\right)^2}{4\,d^2}} \tag{4}$$

$$x_B = \frac{d^2 + {r_1}^2 - {r_2}^2}{2d}, \qquad y_B = -\sqrt{{r_1}^2 - \frac{\left(d^2 + {r_1}^2 - {r_2}^2\right)^2}{4\,d^2}} \tag{5}$$

Aus den Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck folgt :

$$\cos(\alpha) = \frac{x_A}{r_1}, \quad \sin(\alpha) = \frac{y_A}{r_1}, \quad \cos(\beta') = \frac{d - x_A}{r_2}, \quad \sin(\beta') = \frac{y_A}{r_2} \tag{6}$$

Die Winkel β und β' können inneinander umgerechnet werden:

$$\cos(\beta) = \cos(\pi - \beta') = -\cos(\beta'), \qquad \sin(\beta) = \sin(\pi - \beta') = \sin(\beta') \tag{7}$$

Der gemeinsame Schwerpunkt S befindet sich auf der Mitte der Strecke $\overline{PQ}$.

$$x_s(t) = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{r_1 \cdot \cos(\omega\, t + \alpha) + d + r_2 \cdot \cos(\omega\, t + \beta)}{2} \tag{8}$$

$$y_s(t) = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{r_1 \cdot \sin(\omega\, t + \alpha) + r_2 \cdot \sin(\omega\, t + \beta)}{2} \tag{9}$$

Wir zerlegen die trigonometrischen Terme mit den Regeln:

$$\cos(\omega\, t + \beta) = \cos(\omega\, t) \cdot \cos(\beta) - \sin(\omega\, t) \cdot \sin(\beta) \tag{10}$$

$$\sin(\omega\, t + \beta) = \sin(\omega\, t) \cdot \cos(\beta) + \cos(\omega\, t) \cdot \sin(\beta) \tag{11}$$

Nach Einsetzen der Ausdrücke für α und β folgt:

$$x_s(t) = \frac{\left(d^2 + {r_1}^2 - {r_2}^2\right)\, \cos[t\,\omega]}{2\,d} - \sqrt{{r_1}^2 - \frac{\left(d^2 + {r_1}^2 - {r_2}^2\right)^2}{4\,d^2}}\; \sin[t\,\omega] \tag{12}$$

$$y_s(t) = \sqrt{{r_1}^2 - \frac{\left(d^2 + {r_1}^2 - {r_2}^2\right)^2}{4\,d^2}}\; \cos[t\,\omega] + \frac{\left(d^2 + {r_1}^2 - {r_2}^2\right)\, \sin[t\,\omega]}{2\,d} \tag{13}$$

Die Funktionen $x_s(t)$ und $y_s(t)$ entsprechen der Parameterdarstellung der Ortskurve vom Schwerpunkt S. Abbildung 2 zeigt das es sich bei der Ortskurve um einen Kreis handelt, der durch die Schnittpunkte A, B läuft und dessen Mittelpunkt auf der $x-$ Achse liegt. Dieser Kreis sei mit k_3 bezeichnet.

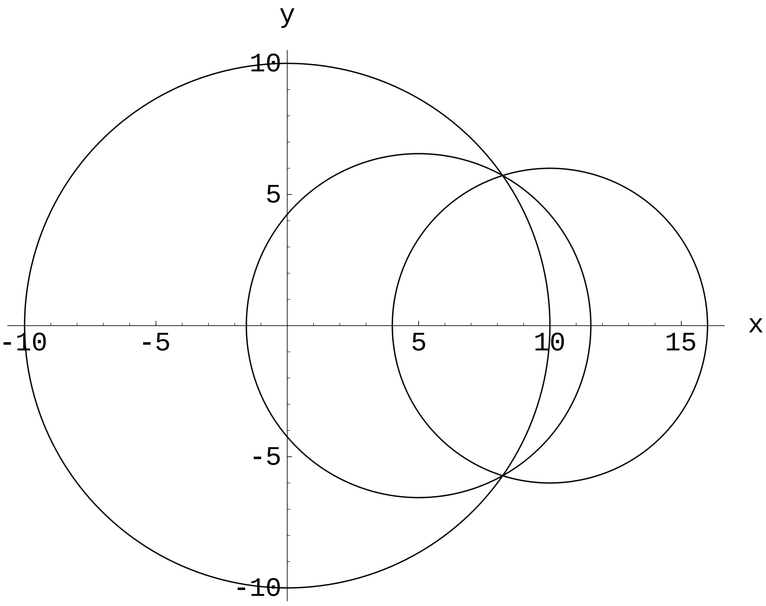

Abbildung 2: Ortskurve vom Schwerpunkt bei gleichen Umlaufsinn

Wir bestimmen nun die Kreisgleichung für k_3 in kartesischen Koordinaten. Der Mittelpunkt von k_3 habe die Koordinaten $M_3(a,0)$. Die allgemeine Kreisgleichung mit Mittelpunkt in M_3 lautet dann :

$$(x_i - a)^2 + {y_i}^2 = R^2 \tag{14}$$

Zur Bestimmung der beiden Parameter a, R benötigen wir zwei unabhängige Punkte $P_3(x_3, y_3)$ und $P_4(x_4, y_4)$ die auf dem Kreis liegen. Wir ermitteln die Punkte aus (12),(13) durch Einsetzen von zwei verschiedenen Winkeln ($\omega = 1$):

$$x_3 = x_s(0) = \frac{(d^2 + {r_1}^2 - {r_2}^2)}{2\,d}, \quad y_3 = y_s(0) = \sqrt{{r_1}^2 - \frac{(d^2 + {r_1}^2 - {r_2}^2)^2}{4\,d^2}} \tag{15}$$

$$x_4 = x_s\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{d^2 + \frac{(r_1 - r_2)\,(r_1 + r_2)}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\,d\sqrt{{r_1}^2 - \frac{\left(d^2 + {r_1}^2 - {r_2}^2\right)^2}{4\,d^2}}}{2\,d} \tag{16}$$

$$y_4 = y_s\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{(r_1 - r_2)\,(r_1 + r_2)}{2\sqrt{2}\,d} + \frac{\sqrt{{r_1}^2 - \frac{\left(d^2 + {r_1}^2 - {r_2}^2\right)^2}{4\,d^2}}}{\sqrt{2}} \tag{17}$$

Mit Hilfe von *Mathematica* lösen wir beide Gleichungen nach a, R auf.

$$a = \frac{d}{2}, \qquad R = \frac{1}{2}\sqrt{2\,{r_1}^2 + 2\,{r_2}^2 - d^2} \tag{18}$$

Kreisgleichung für k_3 :

$$k_3 : \quad \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{2\,{r_1}^2 + 2\,{r_2}^2 - d^2}{4} \tag{19}$$

Für den Fall, das $R = 0$ ist, entartet der Kreis zu einem Punkt. Wir wollen den Radius r_2 für diesen Fall berechnen:

$$\sqrt{2\,{r_1}^2 + 2\,{r_2}^2 - d^2} = 0 \quad \rightarrow \quad r_2 = \sqrt{\frac{d^2}{2} - {r_1}^2} \tag{20}$$

Kegelschnittgleichung für entgegengesetzte Umlaufrichtung

Wir wollen nun die Bahnkurve vom Schwerpunkt S betrachten, falls P und Q sich gegensinnig zueinander auf k_1 bzw. k_2 bewegen. Die Bewegungsgleichungen für P und Q lauten:

$$P: \qquad x_1 = r_1 \cdot \cos(\omega\, t + \alpha), \qquad y_1 = r_1 \cdot \sin(\omega\, t + \alpha) \tag{1}$$

$$Q: \qquad x_2 = d + r_2 \cdot \cos(-\omega\, t + \beta), \qquad y_2 = r_2 \cdot \sin(-\omega\, t + \beta) \tag{2}$$

Das negative Vorzeichen bei ω beschreibt den entgegengerichteten Umlaufsinn zu P. Ansonsten verfahren wir analog wie bei gleichem Umlaufsinn.

$$x_s(t) = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{r_1 \cdot \cos(\omega\, t + \alpha) + d + r_2 \cdot \cos(-\omega\, t + \beta)}{2} \tag{3}$$

$$y_s(t) = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{r_1 \cdot \sin(\omega\, t + \alpha) + r_2 \cdot \sin(-\omega\, t + \beta)}{2} \tag{4}$$

Die Zerlegung der trigonometrischen Terme liefert:

$$\cos(-\omega\, t + \beta) = \cos(\omega\, t) \cdot \cos(\beta) + \sin(\omega\, t) \cdot \sin(\beta) \tag{5}$$

$$\sin(-\omega\, t + \beta) = \sin(\omega\, t) \cdot \cos(\beta) - \cos(\omega\, t) \cdot \sin(\beta) \tag{6}$$

Nach einsetzen in die Formeln für x_s und y_s folgt:

$$x_s(t) = \frac{d^2 + (r_1 - r_2)\,(r_1 + r_2)\,\cos[t\,\omega]}{2\,d} \tag{7}$$

$$y_s = \sqrt{{r_1}^2 - \frac{\left(d^2 + {r_1}^2 - {r_2}^2\right)^2}{4\,d^2}}\,\cos[t\,\omega] + \frac{1}{2}\,d\,\sin[t\,\omega] \tag{8}$$

Abbildung 3 zeigt, das bei entgegengesetzten Umlauf der Schwerpunkt auf einer Ellipse läuft.

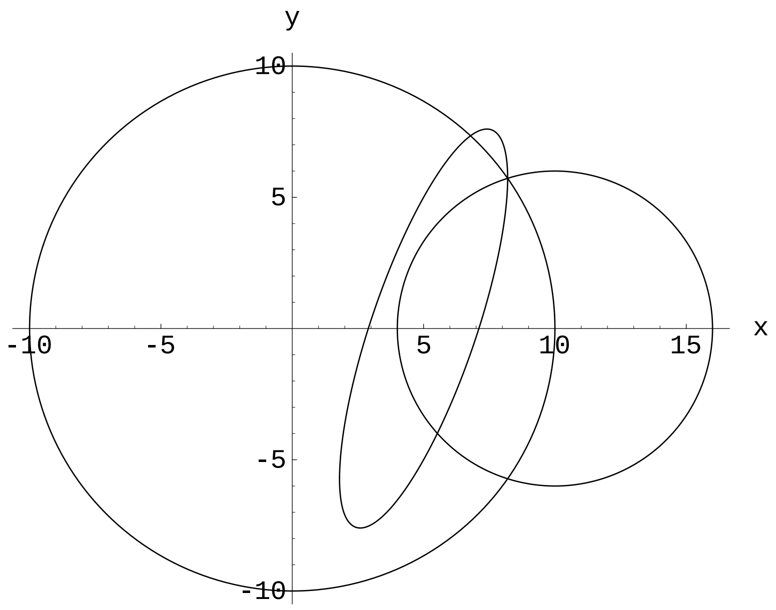

Abbildung 3: Ortskurve vom Schwerpunkt bei entgegen gesetzten Umlaufsinn