Die Suche nach dem passenden Zahnrad

Aufgabenstellung I, Exentergetriebe

nach einer Idee von Helmut Neunzert

Die Problemstellung zur Aufgabe kommt aus der Uhrenindustrie. Zur Fortschaltung der Datumsanzeige wird ein *exentrisches* Getriebe benötigt (Abbildung 1). Zahnrad1 ist dabei nicht zentrisch gelagert, d.h. sein Drehzentrum D_1 ist um die Distanz e aus der Mitte des Rades versetzt. Der Quotient e/r wird in einem solchen Getriebe als *Exentrizität* bezeichnet.
Gesucht ist nun das passende Gegenstück, d.h. ein ovales Rad2 das ständig im Eingriff mit Rad1 steht und sich bei einer Umdrehung von Rad1 genau einmal um seine Achse dreht.

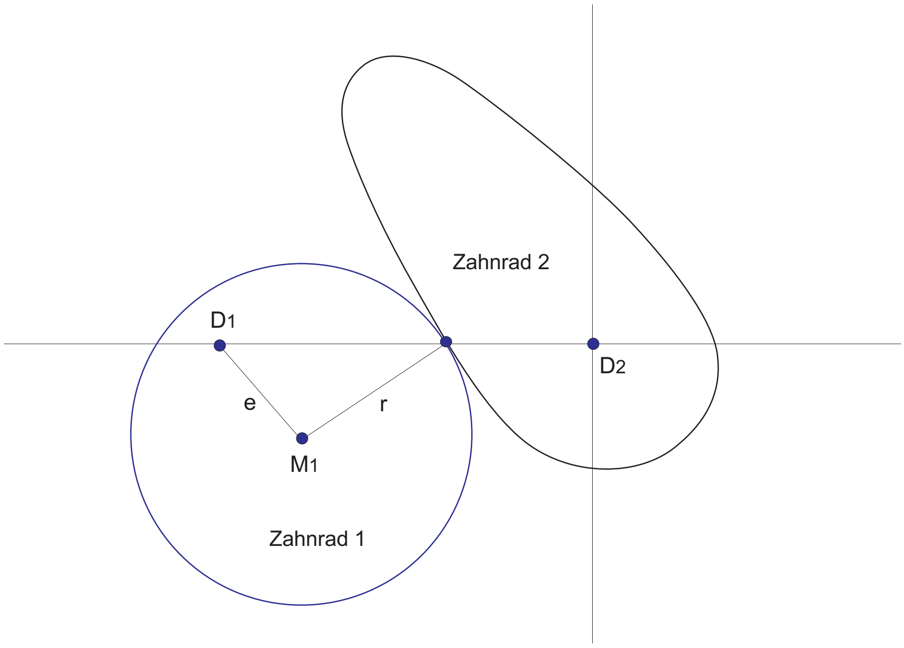

Abbildung 1: Exentergetriebe

1. Formuliere aus den physikalischen Bedingungen der Aufgabenstellung zwei Gleichungen aus denen man die Kurvenform vom Zahnrad2 berechnen kann.

2. Stelle eine Differentialgleichung (DGL) für den Drehwinkel β vom Rad2 auf in Abhängigkeit vom Drehwinkel vom Rad1, d.h. $\beta(\alpha)$.

3. Löse die DGL mittels numerischer Integration und plotte die Kurve vom Rad2 für $r = 5, e = 4$.

Aufgabenstellung II, Zahnräder aus Polarkurven

nach einer Idee von Ingmar Rubin

Wir wollen die vorangehende Aufgabenstellung verallgemeinern. Vorgelegt sei die Randkurve vom Rad1 als Polargleichung $r_1 = r_1(t)$. Die Funktion $r_1(t)$ soll dabei gewissen Eigenschaften genügen, damit unsere Problemstellung sinnvoll bleibt:

1. die Kurve, die $r_1(t)$ beschreibt, sei auf dem Intervall $0 \leq t \leq 2\,\pi$ hinreichend glatt, d.h. es existiere eine stetige erste und zweite Ableitung von r_1 nach t,

2. die Kurve $r_1(t)$ sei $2\,\pi$ periodisch, d.h. es gilt $r_1(0) = r_1(2\,\pi)$ - alle Formen von Spiralkurven scheiden damit aus.

Die verallgemeinerte Aufgabenstellung lautet dann:

1. vorgelegt sei die Polarkurve $r_1(t)$ auf dem Intervall $0 \leq t \leq 2\,\pi$,

2. Entwerfe einen Lösungsalgorithmus zur Bestimmung einer passenden Gegenkurve $r_2(t)$. Benutze als Unterstützung ein Computerprogramm Deiner Wahl.

3. Bestimme für die folgenden Polargleichungen $r_1(t)$ die Gegegenkurve durch numerische Simulation. Plotte beide Kurven $r_1(t)$, $r_2(t)$ in ein Diagramm ($0 \leq t \leq 2\,\pi$).

   (a) $r_1(t) = 1 + \cos^2(t)$,
   (b) $r_1(t) = \frac{5}{4} + \cos(t)$,
   (c) $r_1(t) = 2 + \cos(3\,t)$

Gesamtpunktezahl=14

Lösungsvorschlag für Aufgabe I

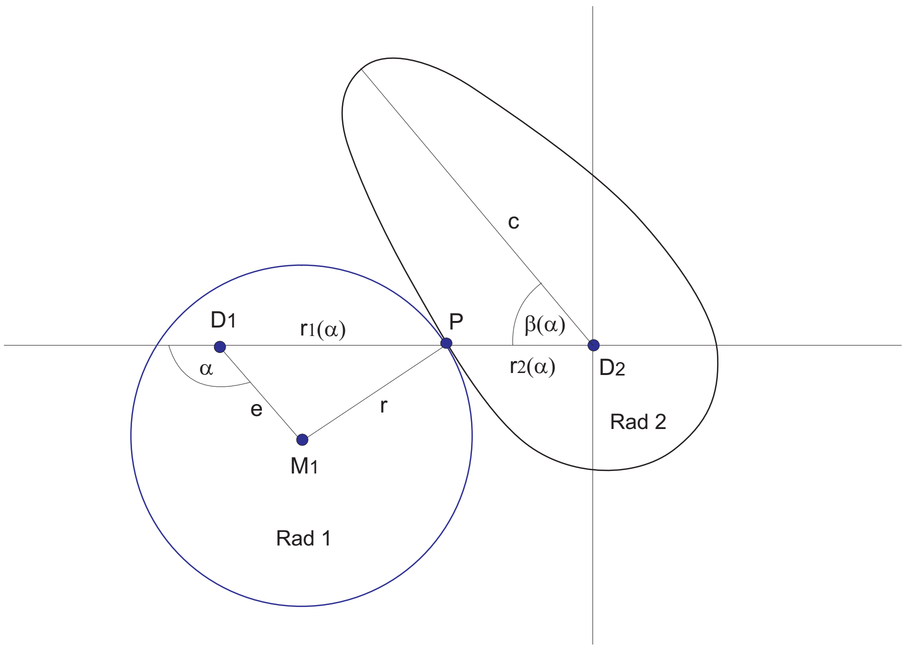

Abbildung 2: Skizze zum Lösungsweg

Wir ergänzen unsere Skizze um den Drehwinkel α und die Punkte M_1, D_1, P, D_2 und den Drehwinkel $\beta(\alpha)$. Drehen wir Rad 1 um den Winkel α und schauen uns den Punkt P an, der auf dem Kreisrad und der Verbindungs- linie der beiden Antriebspunkte liegt. Das Dreieck M_1D_1P kennen wir, den wir kennen die beiden Seiten e und r sowie den Winkel bei D_1, der offenbar $\pi - \alpha$ ist. Wir wollen die dritte Seite $r_1(\alpha) = \overline{D_1P}$ wissen, und die liefert der Cosinussatz:

$$r^2 = e^2 + r_1(\alpha)^2 - 2 \cdot e \cdot r_1(\alpha) \cdot \cos(\pi - \alpha) \tag{1}$$

Für die weiteren Umformumgen und Berechnungen nutzen wir vorteilhaft ein Computeralgebrasystem wie das Programm *Mathematica*. Die Auflösung von (1) nach $r_1(\alpha)$ ergibt:

$$r_1(\alpha) = -e \cdot \cos(\alpha) + \sqrt{e^2 \cdot \cos^2 \alpha + r^2 - e^2} \tag{2}$$

Wir haben gefordert, das beide Räder ständig im Eingriff stehen. Der Berüherungspunkt der beiden Räder liegt immer auf der Verbindunglinie $\overline{D_1D_2}$ der beiden Drehpunkte. Bezeichnen wir die *lange Achse* des zweiten Rades, also den Abstand des Drehpunktes D_2 zum weitestentferneten Randpunkt mit c, so beträgt der konstante Abstand der beiden Drehpunkte:

$$\overline{D_1D_2} = r - e + c = r_1(\alpha) + r_2(\alpha) \tag{3}$$

Dabei ist $r_2(\alpha)$ der Abstand D_2P in Abhängigkeit vom Drehwinkel α.

$$r_2(\alpha) = r - e + c - r_1(\alpha) \tag{4}$$

Die Funktion $r_2(\alpha)$ gibt uns schon die Form des zweiten Rades, aber sehr indirekt, denn α ist ja nicht der Drehwinkel dieses Rades. Drehen wir das Antriebsrad 1 um α, so dreht sich das angetriebene Rad um einen Winkel, den wir noch nicht kennen, aber schon mal $\beta(\alpha)$ nennen. Wie erhält man nun die Funktion $\beta(\alpha)$?
Am besten dadurch, dass man einsieht, dass beide Räder im Berüherungspunkt die gleiche Geschwindigkeit haben müssen; schließlich sind es ja Zahnräder, die formschlüssig ineinandergreifen und kein Rutschen zulassen.
Das Antriebsrad 1 dreht sich mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit ω_1, das heißt

$$\alpha(t) = \omega_1 \cdot t \tag{5}$$

wenn t die Zeit ist. Die Bahngeschwindigkeit v_1 am Berüherungspunkt P beträgt dann:

$$v_1 = r_1(\alpha) \cdot \omega_1 \tag{6}$$

Das zweite Rad hat natürlich keine konstante Winkelgeschwindigkeit - es soll sich ja um Mitternacht schnell drehen und sich sonst möglichst ruhig verhalten. Trotzdem kann man eine momentane Änderung des Winkels β, also $d\beta/dt$, als momentane Winkelgeschwindigkeit ω_2 ansehen:

$$\omega_2 = \frac{d\beta}{dt} \tag{7}$$

Uns interessiert $\beta(\alpha)$, und es ist nach Kettenregel :

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{d\beta}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \omega_1 \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} = \omega_2 \tag{8}$$

Die Geschwindigkeit des zweiten Rades im Berüherungspunkt ist also:

$$v_2 = r_2(\alpha) \cdot \omega_2 \tag{9}$$

und sie muß gleich v_1 sein:

$$v_1 = v_2 \quad \rightarrow \quad r_1(\alpha) \cdot \omega_1 = r_2(\alpha) \cdot \omega_1 \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} \tag{10}$$

oder

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{r_1(\alpha)}{r_2(\alpha)} = \frac{r_1(\alpha)}{r - e + c - r_1(\alpha)} \tag{11}$$

Die Funktion $\beta(\alpha)$ erhalten wir aus der Integration:

$$\beta(\alpha) = \int_0^{\beta} \frac{r_1(\tau)}{r - e + c - r_1(\tau)}\, d\tau \tag{12}$$

da ja $\beta(0) = 0$ gesetzt werden kann. Die Konstante c kann nicht beliebig gewählt werden. Vielmehr müssen wir berücksichtigen, dass bei einer Umdrehung von Zahnrad 1 sich natürlich auch das Zahnrad 2 einmal um 360 Grad gedreht haben muß.

$$\beta(\alpha) = \int_0^{2\pi} \frac{r_1(\tau)}{r - e + c - r_1(\tau)}\, d\tau = 2\pi \tag{13}$$

Das ist eine Gleichung zur Bestimmung von c, denn mit

$$F(c) = \int_0^{2\pi} \frac{r_1(\tau)}{r - e + c - r_1(\tau)}\, d\tau - 2\pi \tag{14}$$

geht es darum die Nullstelle von $F(c)$ zu bestimmen. Leider existieren für die Integrale (12) und (13) keine geschlossenen Ausdrücke, so dass wir die Kurvenform über numerischer Integration bestimmen müssen. Die Nullstelle von (14) erhalten wir aus einer Intervallschachtelung. Für $r = 5.0$ und steigende Werte von e erhält man in *Mathematica* :

e	1.0	2.0	3.0	4.0	4.5	4.9
c	6.0985	7.381	8.815	10.353	11.146	11.775

Die Kurvengleichung für das Zahnrad 2 lautet in Parameterform:

$$x_2(\alpha) = r_2 \cdot \cos[\pi - \beta(\alpha)], \qquad y_2(\alpha) = r_2 \cdot \sin[\pi - \beta(\alpha)] \tag{15}$$

Die folgenden Grafiken zeigen den Paramterplots $(x_2(\alpha), y_2(\alpha))$ im Intervall $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ bei zunehmender Exzentrizität e/r.

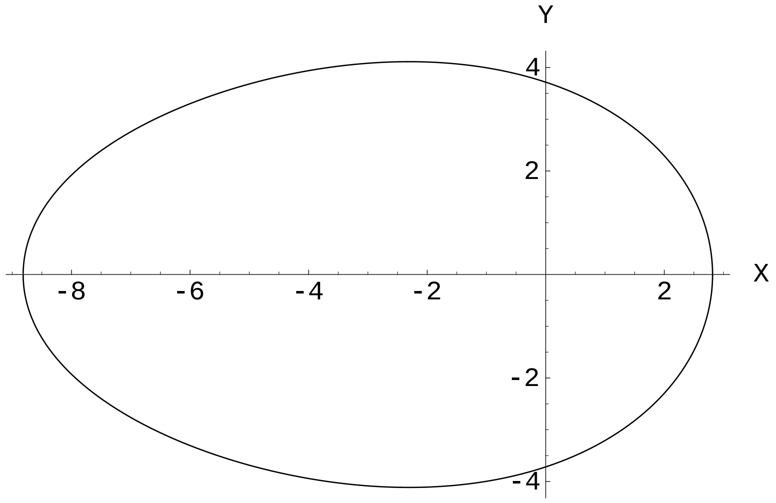

Abbildung 3: Zahnrad 2 für $r = 5.0$, $e = 3.0$

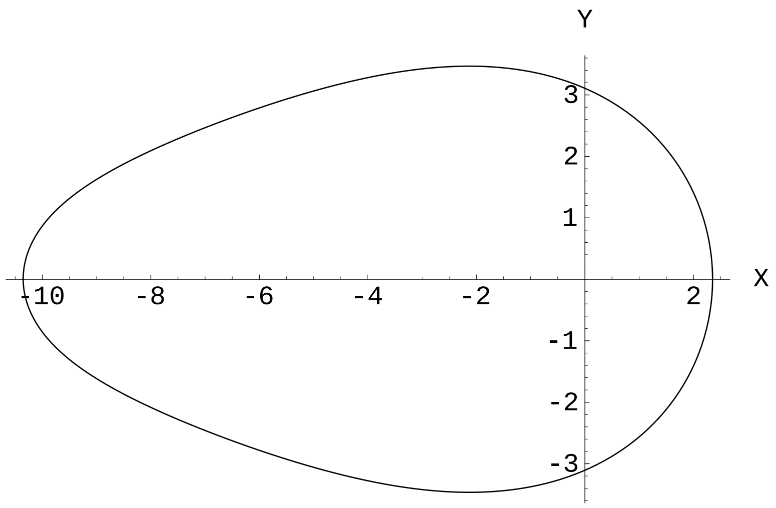

Abbildung 4: Zahnrad 2 für $r = 5.0$, $e = 4.0$

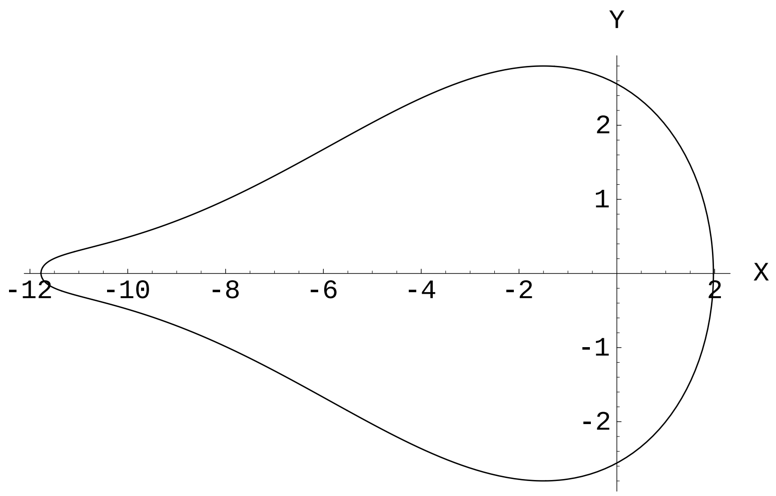

Abbildung 5: Zahnrad 2 für $r = 5.0$, $e = 4.9$

Lösungsvorschlag für Aufgabe II

Der Abstand der Drehzentren ist konstant

Wir wollen den Lösungsalgorithmus am Beispiel der Polarkurve

$$r_1(t) = 1 + \cos^2(t) \tag{1}$$

beschreiben. Als Computerprogramm wird *Mathematica 5.0* verwendet. Es lassen sich ananalog dazu auch gängige Computeralgebrasysteme wie MuPAD, MAPLE V oder MathCAD einsetzen.
Zunächst ist es sinnvoll sich ein Bild von der Kurve zu verschaffen. In *Mathematica* laden wir das Paket `Graphics` mit dem Befehl `PolarPlot`.

```
r1 = 1 + Cos[t]^2;
<< Graphics`Graphics`
graph1 = PolarPlot[r1, {t, 0, 2 Pi}, PlotPoints -> 200,
   AxesLabel -> {"x", "y"}, AspectRatio -> Automatic]
```

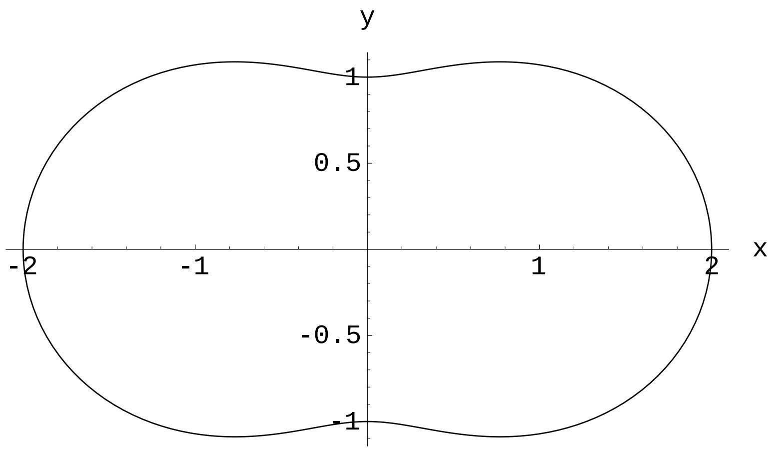

Abbildung 6: Polarplot für $r_1(t) = 1 + \cos^2(t)$

Die Drehzentren beider Räder befinden sich in einem konstanten Abstand zueinander. Die Summe aus $r_1(t)$ und $r_2(t)$ ist stets konstant. Wenn $r_1(t)$ sein Minimum erreicht, so wird r_2 in diesem Moment seinen maximalen Abstand zum Drehzentrum einehmen (Abbildung 7). Die Funktion $r_1(t)$ ist uns gegegeben, so dass wir r_{1min} bestimmen können. Für das Maximum von r_2 setzen wir eine noch zu bestimmende Konstante c ein.

$$r_1(t) + r_2(t) = r_{1min} + r_{2max} \quad \rightarrow \quad r_2(t) = r_{1min} + c - r_1(t) \tag{2}$$

Das Minimum $r_1(t)$ können wir entweder direkt aus der Kurvengleichung (bzw. dem Kurvenplot) ablesen oder mittels Differentialrechnung ermitteln. Die hier vorgestellten Polargleichungen gestatten ein direktes Ablesen aus der Kurvengleichung, da die Minima / Maxima der Cosinusfunktion bekannt sind. In komplizierten Fällen, muß man die Nullstellen der 1. Ableitung ermitteln, und daraus dann das Minimum:

$$\frac{d\,r_1(t)}{d\,t} = 0 \quad \rightarrow \quad t_0 = t_{min}, \quad r_{1min} = r_1(t_{min}) \tag{3}$$

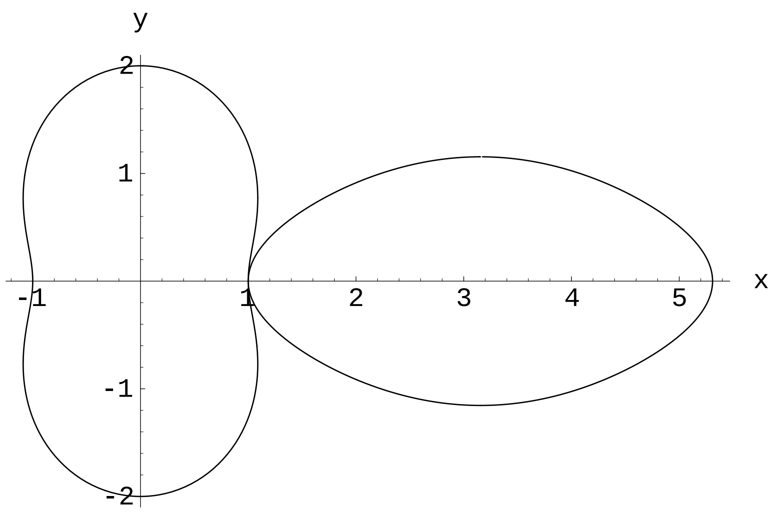

Abbildung 7: konstanter Abstand der Drehzentren, Polarplot $r_1(t) = 1 + \cos^2(t)$

Bestimmung von c

Wenn das Rad1 eine Umdrehung vollzogen hat, so muß sich auch Rad2 um den Winkel 2π gedreht haben. Wie bei Aufgabe 1 müssen wir die Nullstelle der Funktion $F(c)$ bestimmen:

$$F(c) = \int_0^{2\pi} \frac{r_1(\tau)}{r_2(\tau)}\, d\tau - 2\pi = \int_0^{2\pi} \frac{r_1(\tau)}{r_{1min} + c - r_1(\tau)}\, d\tau - 2\pi \tag{4}$$

Ein schnell konvergentes Verfahren ist die *Newton - Iteration*. Wir benötigen dazu die Ableitung :

$$F'(c) = \frac{dF(c)}{dc} = -\int_0^{2\pi} \frac{r_1(\tau)}{[r_{1min} + c - r_1(\tau)]^2}\, d\tau \tag{5}$$

Die Wahl des Startwertes c_0 für die Iteration ist relativ kritisch. Es kann dabei leicht geschehen, dass keine Konvergenz eintritt. Die Werte von c_i nehmen dann rasch an Größe zu oder werden negativ. Das Verfahren muß dann abgebrochen werden und der ursprünglichen Wert von c_0 geändert werden. Für die in Aufgabenstellung II gewählten Polarkurven ist $c_0 = 2.0..3.0$ ein guter Startwert.

$$c_0 = 2.0; \quad c_{i+1} := c_i - \frac{F(c_i)}{F'(c_i)} = c_i - \frac{\int_0^{2\pi} \frac{r_1(\tau)}{r_{1min}+c-r_1(\tau)}\, d\tau - 2\pi}{-\int_0^{2\pi} \frac{r_1(\tau)}{[r_{1min}+c-r_1(\tau)]^2}\, d\tau} \tag{6}$$

Die Iteration wird solange fortgesetzt, bis ($c_{i+1} - c_i < 0.0001$) beträgt. In Mathematica sehen die Kommandos wei folgt aus

```
c = c - (NIntegrate[F, {t, 0, 2 Pi}] - 2 Pi) /
        NIntegrate[F', {t, 0, 2 Pi}])
c0= 2.0
c3= 2.1547
```

Integration der DGL für $\beta(t)$

Nach dem wir c kennen, müssen wird die DGL für den Drehwinkel $\beta(t)$ integrieren.

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{r_1(t)}{r_2(t)} = \frac{r_1(t)}{r_{1min} + c - r_1(t)}, \qquad AB: \beta(0) = 0 \tag{7}$$

In der Regel wird es keine geschlossene Lösung geben, und wir müssen ein numerisches Nährungsverfahren wählen. Im Programm *Mathematica* erhält man eine interpolierte Näherungsfunktion zurück.

```
solution= NDSolve[{y'[t]==r1[t]/r2[t], y[0]==0}, y[t], {t,0,2 Pi}]
y[t] -> InterpolatingFunction[{{0., 6.28319}}, <>][t]
```

Graphische Darstellung der Polarkurven

Zum Abschluß plotten wir die Originalkurve $r_1(t)$ und $r_2(\beta(t))$ in ein Diagramm. Die x-Komponente von $r_2(t)$ verschieben wir um den Betrag $r_{1min} + c$ nach rechts im Koordinatensystem, um beide Räder korrekt im Eingriff zu sehen.

$$x_1(t) = r_1(t) \cdot \cos(t), \qquad y_1(t) = r_1(t) \cdot \sin(t) \tag{8}$$

$$x_2(t) = r_{1min} + c + r_2 \cdot \cos(\pi - \beta(t)), \qquad y_2(t) = r_2 \cdot \sin(\pi - \beta(t)) \tag{9}$$

In *Mathematica* sehen die Kommandos dazu wie folgt aus:

```
    x2 = c + 1 + r2 Cos[ Pi/2 - y[t] /.solution]
    y2 = r2 Sin[ Pi/2 - y[t] /. solution]
graph2 = ParametricPlot[Evaluate[{x2, y2} /. solution], {t, .01, 2 Pi},
         PlotPoints -> 400, AxesLabel -> {"x", "y"}, AspectRatio -> Automatic]
curve3 = Show[{graph1, graph2}]
```

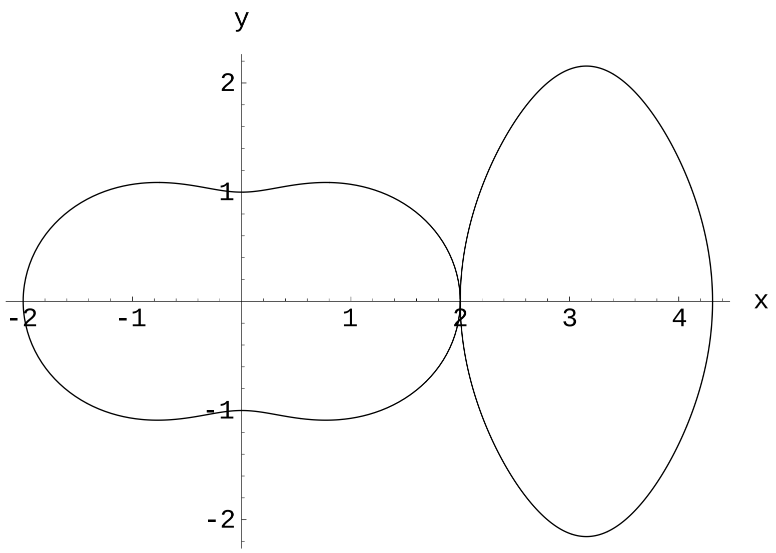

Abbildung 8: Polarplot für $r_1(t) = 1 + \cos^2(t)$ um 90° gedreht

Kurvenplot für $r_1(t) = \frac{5}{4} + \cos(t)$

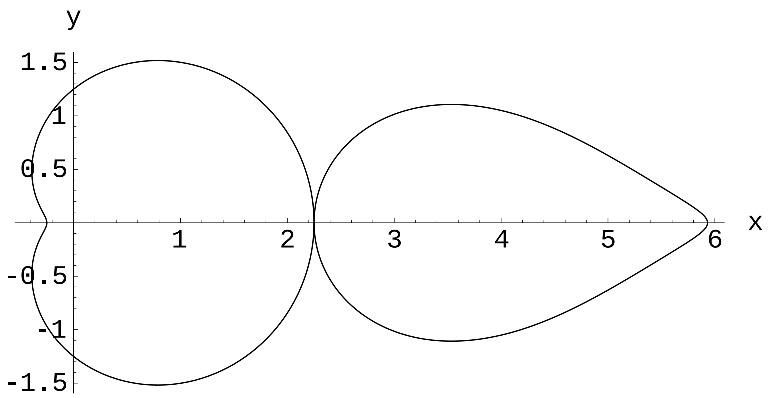

Abbildung 9: Polarplot $r_1(t) = \frac{5}{4} + \cos(t)$

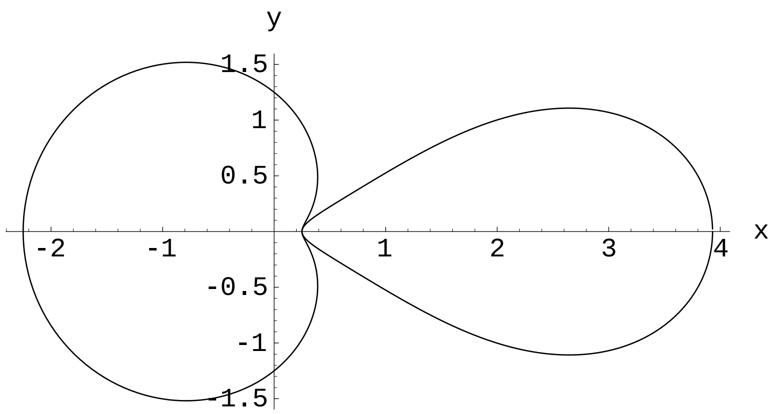

Abbildung 10: Polarplot für $r_1(t) = \frac{5}{4} + \cos(t)$ um 180° gedreht

Kurvenplot für $r_1(t) = 2 + \cos(3\,t)$

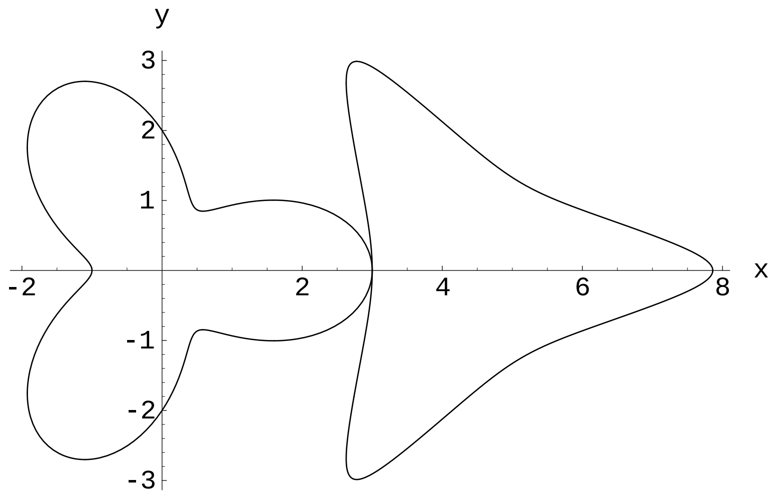

Abbildung 11: Polarplot $r_1(t) = 2 + \cos(3\,t)$

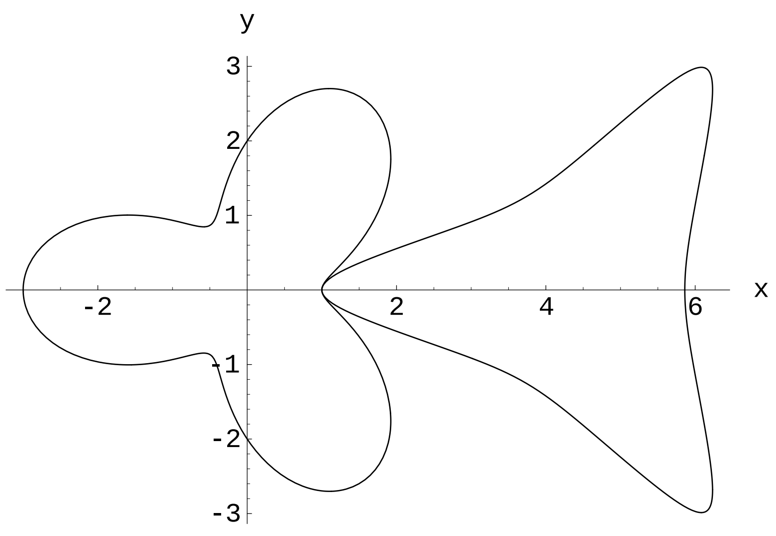

Abbildung 12: Polarplot für $r_1(t) = 2 + \cos(3\,t)$ um 180° gedreht