

Sehnenkurven

Eine Aufgabe von Ingmar Rubin

3. April 2001

Aufgabe 1: Kreissehne

In einem Kreis k_1 vom Radius r sei eine Sehne eingezeichnet, die durch einen Punkt P in zwei Teilstrecken der Länge a und b geteilt wird. Wenn die Sehne einmal im Kreis herumwandert, beschreibt der Teilungspunkt P einen weiteren (inneren) Kreis k_2 als Ortslinie.

Welchen Flächeninhalt besitzt der Kreisring zwischen k_1 und k_2 ?

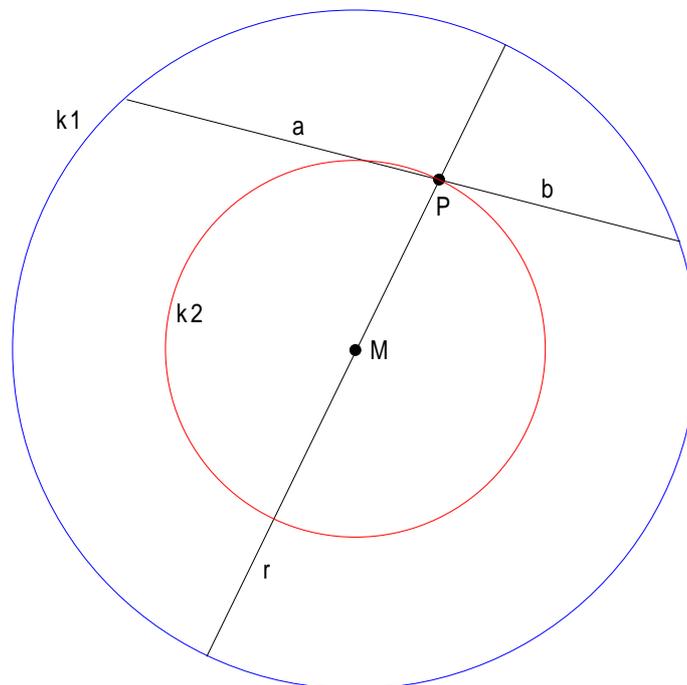


Abbildung 1: Kreis k_1 mit der Sehne $a + b$ und dem Teilungspunkt P

Punktezahl=4

Aufgabe 2: Ellipsensehne

Gegeben sei die Ellipse mit Halbachsen u, v . Im inneren der Ellipse wandert die Sehne mit der Länge

$$a + b = \frac{u + v}{2} \quad (1)$$

einmal herum.

1. Welche Ortslinie beschreibt der Mittelpunkt $P(x, y)$ der Sehne, d.h. $a = b$?
2. Geben Sie eine Parameterdarstellung $x = x(t), y = y(t)$ für die Koordinaten von P an!
3. Zeichnen Sie das Bild der Ellipse und die Ortslinie von P in ein Diagramm ($0 \leq t \leq 2\pi$). Wählen Sie $u = 6 \text{ cm}$ und $v = 4 \text{ cm}$.
4. Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen der Ellipse und der von P erzeugten Ortslinie.

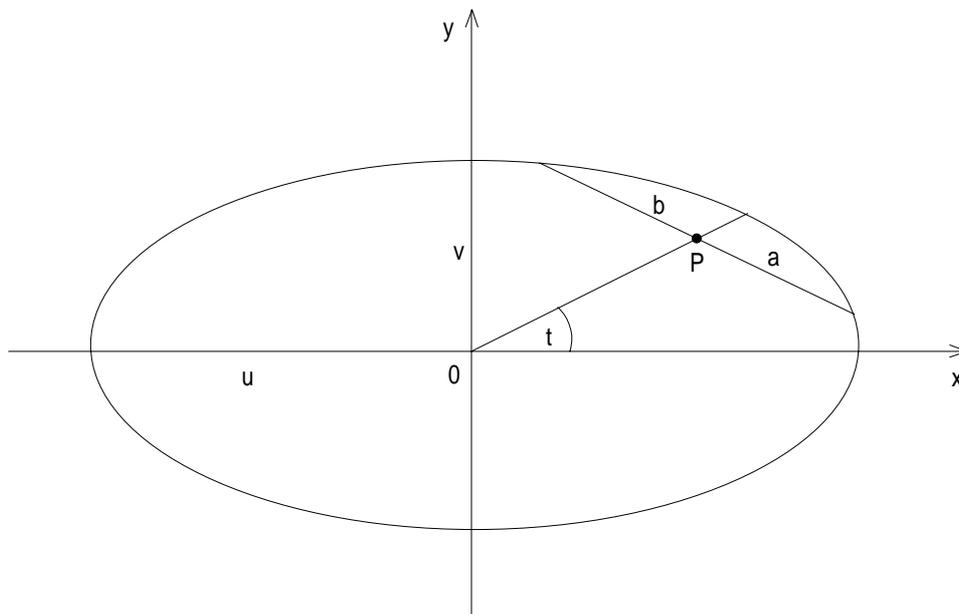


Abbildung 2: Ellipse mit den Halbachsen u, v und der Sehne $a + b$

Für Kurven, welche auf diese Weise erzeugt werden formulierte der englische Mathematiker *Hammond Holditch* 1858 den folgenden Satz:

Wenn eine Sehne der konstanten Länge $a + b$ in einer geschlossenen Kurve von einem Punkt P in zwei Strecken der Länge a, b geteilt wird, hat die Differenz der von der Kurve und der Ortslinie des Teilpunkts erzeugten Fläche den Inhalt $A_{diff} = \pi \cdot a \cdot b$.

Zeigen Sie für beide Aufgabenstellungen dass der Satz richtig ist. (Punktezah=10)