Besondere Punkte im Dreieck Teil II

Eine Aufgabe von Ingmar Rubin

15. April 2002

Gegeben sei das $\triangle ABC$ und sein Umkreis k mit dem Radius r. Der Mittelpunkt des Umkreises liege im Koordinatenursprung $M(0,0)$. Ferner seien gegeben der Winkel α zwischen $x-$ Achse und Strecke $\overline{MA}$ und der Winkel β zwischen $x-$ Achse und Strecke $\overline{MB}$.

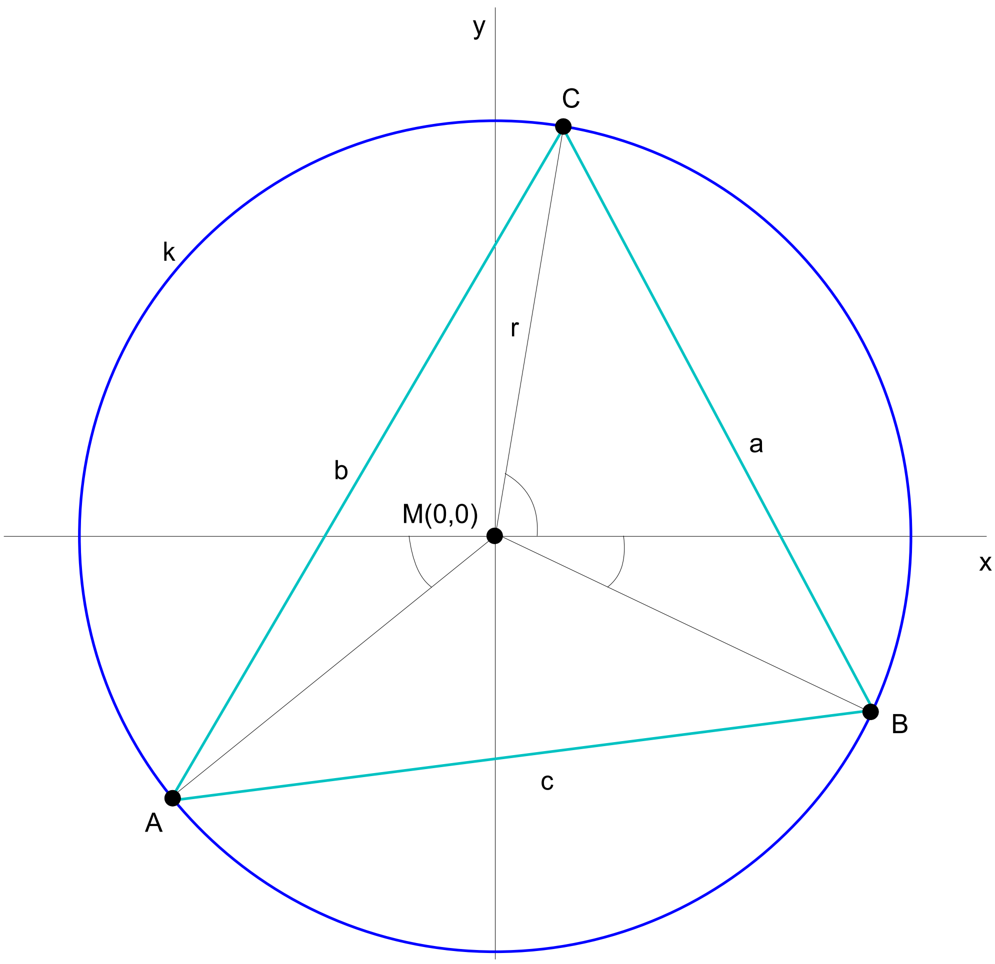

Abbildung 1: Bild zur Aufgabenstellung

1. Welche Ortskurve beschreibt der Schwerpunkt S vom Dreieck ABC wenn Punkt C einmal entlang der Kreisperipherie bewegt wird ? Der Drehwinkel τ aus Abbildung 1 durchlaufe dabei das Intervall $0 \leq \tau \leq 2\pi$.
2. Leite eine Parameterdarstellung für die Koordinaten von S in der Form $x_s = x_s(\tau)$ und $y_s = y_s(\tau)$ her.
3. Zeichne die Parameterkurve für $\alpha = \frac{\pi}{3}, \quad \beta = \frac{\pi}{3}$ und $r = 10\,cm$.
4. Berechne den von der Ortskurve eingeschlossenen Flächeninhalt F_s.
5. In welchem Verhältnis steht F_s zum Flächeninhalt vom Umkreises F_u ?

Punktezahl=8

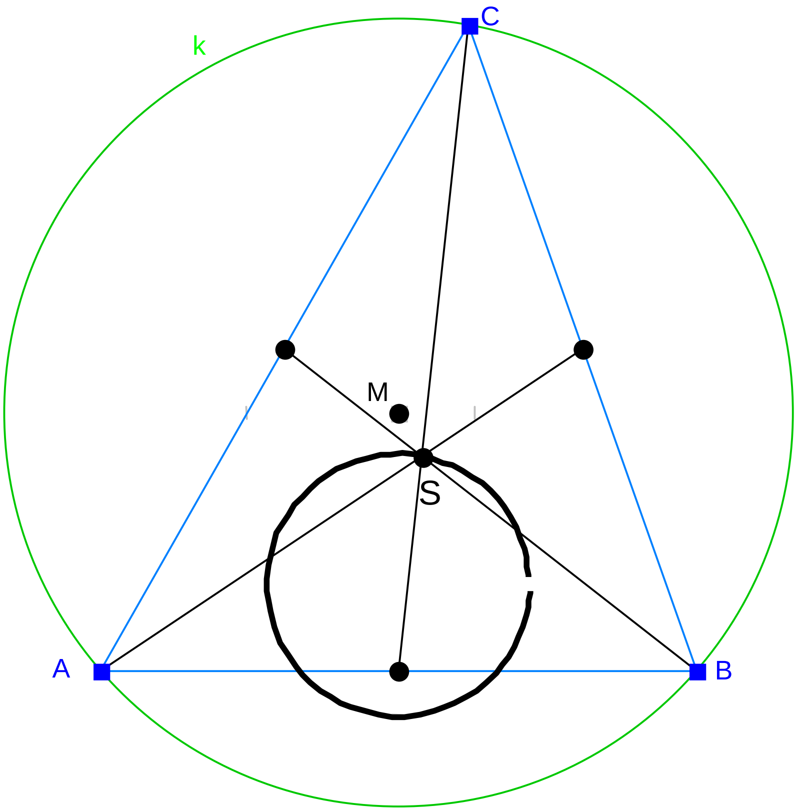

Abbildung 2: Ortskurve vom Schwerpunkt mit *Euklid* konstruiert

Parameterdarstellung der Ortskurve

Wir bezeichnen die Koordinaten der Punkte A, B, C mit :

$$A(x_a, y_a), \quad B(x_b, y_b), \quad C(x_c, y_c) \tag{1}$$

Punkt $P_1(x_1, y_1)$ halbiere die Seite $a = \overline{BC}$. Seine Koordinaten lauten:

$$x_1 = \frac{x_b + x_c}{2}, \qquad y_1 = \frac{y_b + y_c}{2} \tag{2}$$

Punkt $P_2(x_2, y_2)$ halbiere die Seite $b = \overline{AC}$. Seine Koordinaten lauten:

$$x_2 = \frac{x_a + x_c}{2}, \qquad y_2 = \frac{y_a + y_c}{2} \tag{3}$$

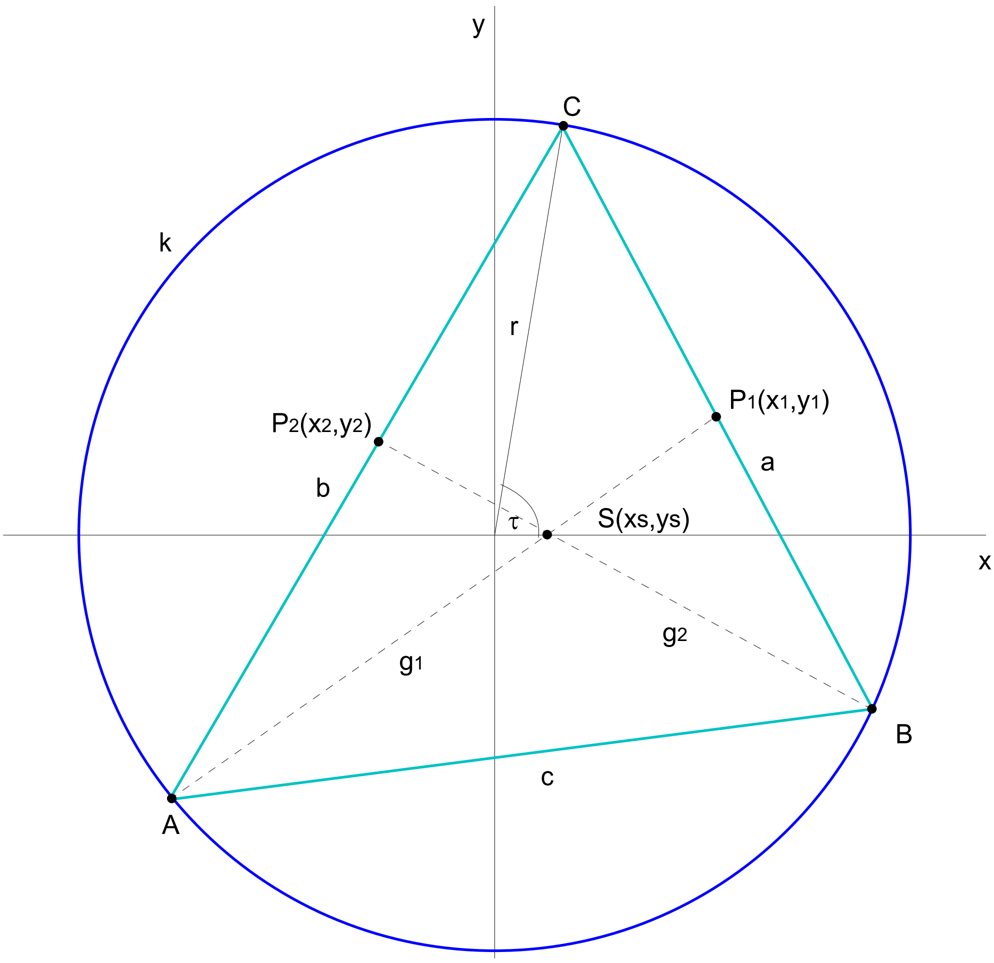

Abbildung 3: Berechnug der Schwerpunktkoordinaten

Aus der Verbindungslinie $\overline{AP_1}$ folgt die Geradengleichung der Seitenhalbierenden für Seite a (Zweipunkteform):

$$g_1: \quad \frac{y-y_a}{y_1-y_a}=\frac{x-x_a}{x_1-x_a} \quad \rightarrow \quad \frac{y-y_a}{\frac{y_b+y_c}{2}-y_a}=\frac{x-x_a}{\frac{x_b+x_c}{2}-x_a} \tag{4}$$

Aus der Verbindungslinie $\overline{BP_2}$ folgt die Geradengleichung der Seitenhalbierenden für Seite b (Zweipunkteform):

$$g_2: \quad \frac{y-y_b}{y_2-y_b}=\frac{x-x_b}{x_2-x_b} \quad \rightarrow \quad \frac{y-y_b}{\frac{y_a+y_c}{2}-y_b}=\frac{x-x_b}{\frac{x_a+x_c}{2}-x_b} \tag{5}$$

Aus dem Schnittpunkt von g_1 und g_2 erhalten wir die Koordinaten vom Schwerpunkt:

$$g_1=g_2: \qquad x_s=\frac{1}{3}\cdot(x_a+x_b+x_c), \qquad y_s=\frac{1}{3}\cdot(y_a+y_b+y_c) \tag{6}$$

Wir schreiben nun die Punkte A, B, C in Polarkoordinatendarstellung auf :

$$x_a=r\cos(\pi+\alpha), \qquad y_a=r\sin(\pi+\alpha) \tag{7}$$

$$x_b=r\cos(2\pi-\beta), \qquad y_b=r\sin(2\pi-\beta) \tag{8}$$

$$x_c=r\cos(\tau), \qquad y_c=r\sin(\tau) \tag{9}$$

Damit erhalten wir die gewünschte Parameterdarstellung der Koordinaten vom Schwerpunkt:

$$x_s(t)=\frac{r}{3}\cdot(\cos[\tau]+\cos[\pi+\alpha]+\cos[2\pi-\beta]) \tag{10}$$

$$y_s(t)=\frac{r}{3}\cdot(\sin[\tau]+\sin[\pi+\alpha]+\sin[2\pi-\beta]) \tag{11}$$

Die Ortskurve des Schwerpunktes beschreibt einen Kreis mit dem Radius $r_s=\frac{r}{3}$. Der Mittelpunkt des Kreises liegt bei:

$$x_m=\frac{r}{3}\cdot(\cos[\pi+\alpha]+\cos[2\pi-\beta]), \tag{12}$$

$$y_m=\frac{r}{3}\cdot(\sin[\pi+\alpha]+\sin[2\pi-\beta]) \tag{13}$$

Bild der Ortskurve

Abbildung 3 zeigt den Umkreis vom Dreieck ABC und die Ortskurve vom Schwerpunkt für die Parameter $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, $r = 10\,cm$. Der Mittelpunkt des Kreise befindet sich bei:

$$x_m = \frac{r}{3} \cdot \left(\cos\left[\frac{4\pi}{3}\right] + \cos\left[\frac{5\pi}{3}\right]\right) = -\frac{\sqrt{3} \cdot r}{3} \tag{14}$$

$$y_m = \frac{r}{3} \cdot \left(\sin\left[\frac{4\pi}{3}\right] + \sin\left[\frac{5\pi}{3}\right]\right) = 0 \tag{15}$$

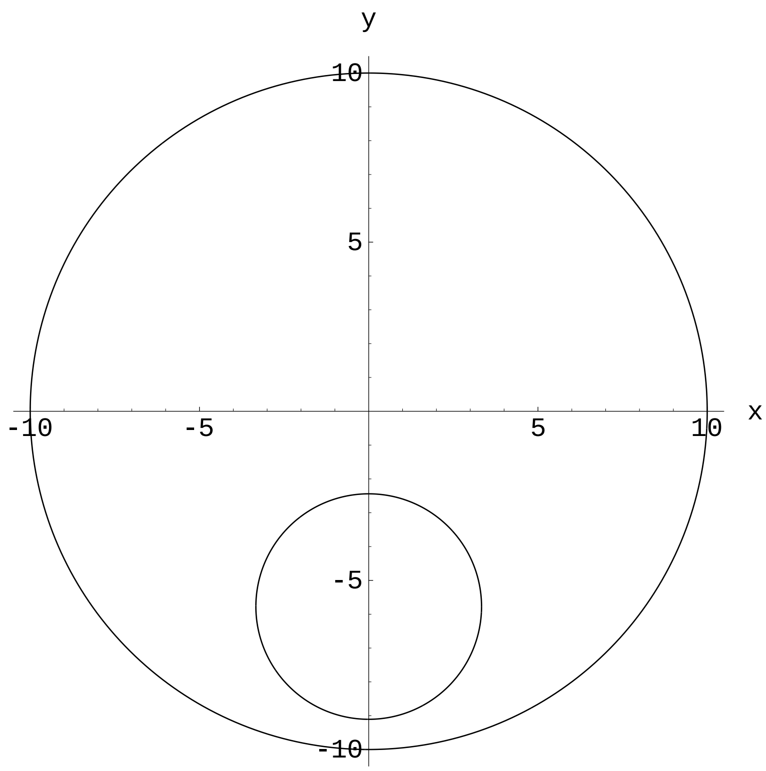

Abbildung 4: Ortskurve des Schwerpunktes

Verhältnis der Flächeninhalte

Der Flächeninhalt den die Ortskurve des Schwerpunktes einschließt beträgt:

$$F_s = \pi \cdot r_s^2 = \frac{\pi \cdot r^2}{9} \tag{16}$$

Für den Umkreis gilt:

$$F_u = \pi \cdot r^2 \tag{17}$$

Das Verhältnis zwischen F_s und F_u beträgt demnach $1 : 9$