Parameterkurve I

Wettbewerbsaufgabe der TU-Magdeburg

Der Punkt $R(x, y)$ bewegt sich auf der Geraden zwischen den Punkten P_1 und P_2. Man verbinde R mit dem Ursprung O und betrachte den Punkt $P(u, v)$, der auf der Verlängerung $\overline{OR}$ liegt, wobei stets $\overline{RP} = 1$ beträgt.

1. Wie lautet die Parameterdarstellung $u = u(t)$ und $v = v(t)$ vom Punkt P ? Als Parameter ist $t = \overline{OS}$ einzuführen .
2. Zeichnen Sie die Kurve von $k(u, v)$ gemeinsam mit den Kreisbögen $r = 1$ und $R = 2$. In welchen Verhältnis wird die Fläche zwischen den beiden Kreisbögen von k geteilt ?
3. Berechen Sie die Kurvenlänge von k für das Interval $0 \leq t \leq 1$

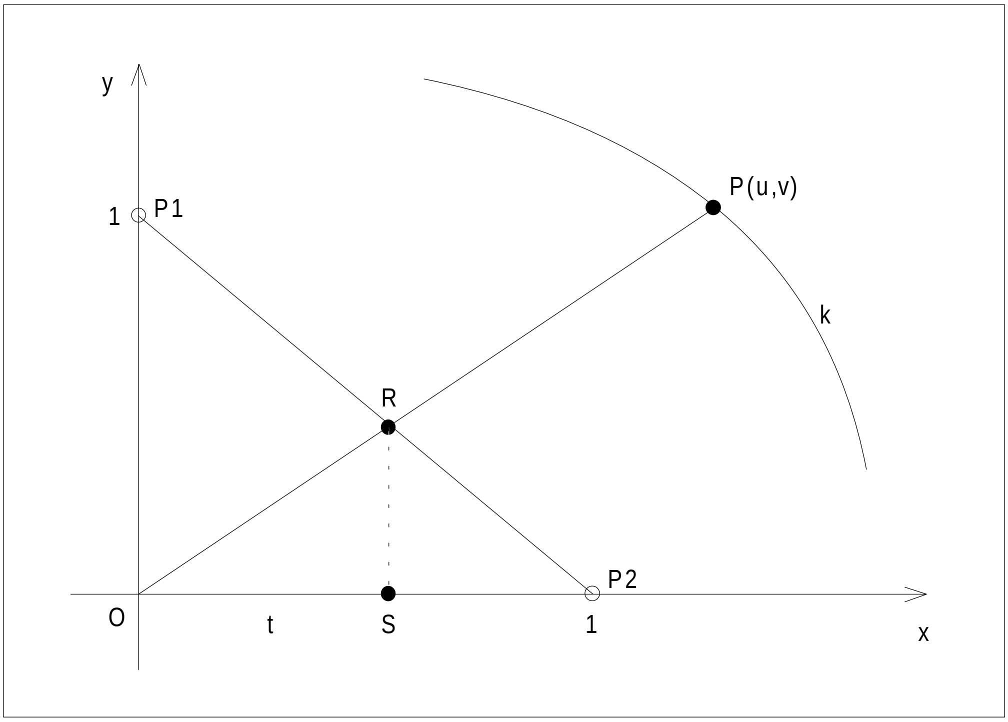

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabenstellung

Punktezahl: 8

1 Lösungsweg

1.1 Parameterdartstellung der Kurve k

Wir ermitteln zunächst die Koordinaten von R. R bewegt sich auf der Geraden zwischen den Punkten P_1 und P_2:

$$\overline{P_1 P_2}: \qquad y = -x + 1 \tag{1}$$

Die x- Koordinate von R ist identisch mit dem Parameter t (Strecke $\overline{OS}$). Setzen wir $x = t$ in die Geradengleichung ein, folgt daraus die y-Koordinate.

$$R_x = t \qquad R_y = 1 - t \tag{2}$$

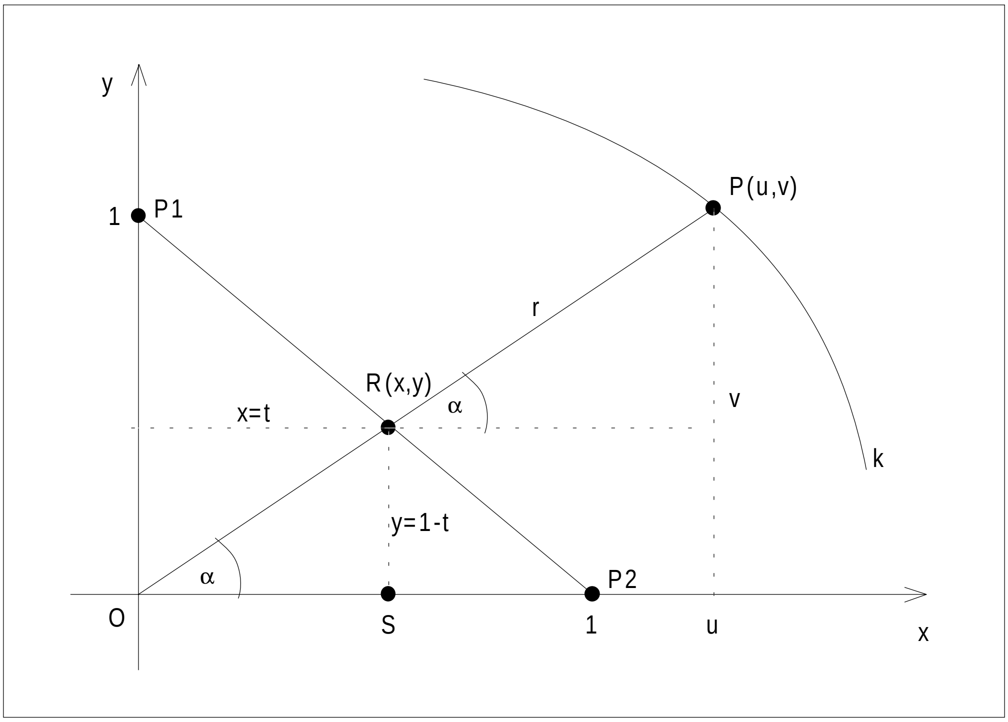

Abbildung 2: Berechnung der Koordinaten $u(t)$ und $v(t$

Mit Hilfe des Anstiegswinkels α können die Koordinaten von P wie folgt berechnet werden:

$$u(t) = R_x + r \cdot \cos(\alpha), \qquad v(t) = R_y + r \sin(\alpha) \tag{3}$$

Der Cosinus und Sinus von α lautet :

$$\cos(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{t}{\sqrt{2 \cdot t^2 - 2 \cdot t + 1}} \tag{4}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1 - t}{\sqrt{2 \cdot t^2 - 2 \cdot t + 1}} \tag{5}$$

Der Abstand $r = \overline{RP}$ beträgt konstant $r = 1$. Die Koordinaten u, v können jetzt als Parameterfunktion von t notiert werden:

$$u(t) = t + \frac{t}{\sqrt{2 \cdot t^2 - 2 \cdot t + 1}}, \quad v(t) = 1 - t + \frac{1-t}{\sqrt{2 \cdot t^2 - 2 \cdot t + 1}} \tag{6}$$

1.2 Flächenberechnung

Die zwischen der Kurve k und den Koordinatenachsen liegende Fläche kann mit Hilfe der *Leibnizschen Sektorenformel* berechnet werden.

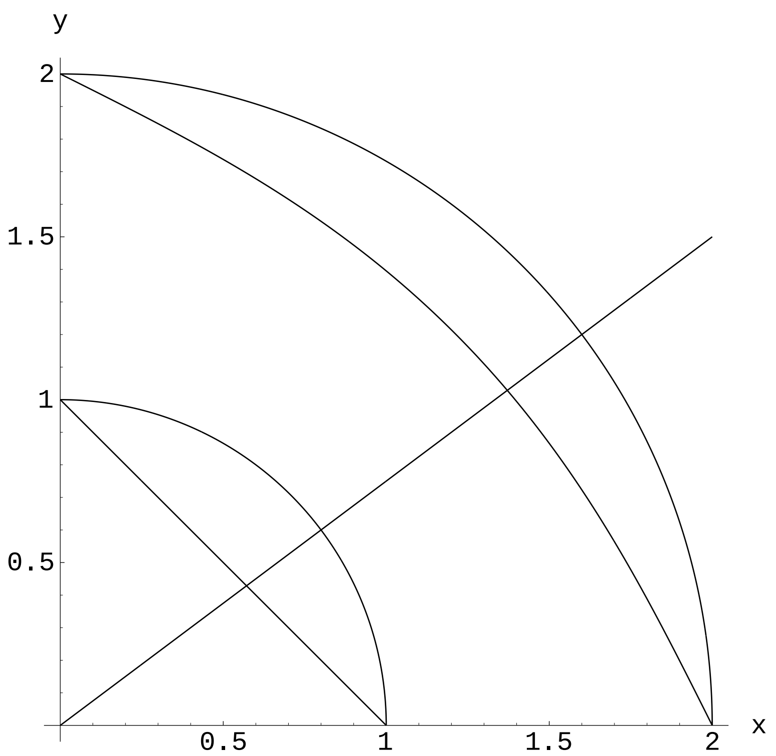

Abbildung 3: Kurve k mit den Kreisbögen $r = 1$ und $R = 2$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 (u \cdot \dot{v} - \dot{u} \cdot v) \cdot dt \tag{7}$$

$$\dot{u} = 1 + \frac{1-t}{\sqrt{(1 + 2(-1+t) \cdot t)^3}}$$

$$\dot{v} = -1 - \frac{t}{\sqrt{(1 + 2(-1+t) \cdot t)^3}}$$

$$A = \int_0^1 -\frac{\left(1 + \sqrt{1 + 2 \cdot (-1+t) \cdot t}\right)^2}{2 \cdot (1 + 2 \cdot (-1+t) \cdot t)} \cdot dt = 2.53185$$

Mit Hilfe eines Computeralgebraprogramms kann das Integral auch analytisch gelöst werden:

$$A = -\frac{t}{2} + \frac{\mathrm{ArcSinh}(1 - 2 \cdot t)}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot \arctan(1 - 2 \cdot t)$$

Die einzelnen Teilflächen ergeben sich zu:

$$kleiner \quad Viertelkreis \quad mit \quad r = 1 \qquad A_1 = \frac{r^2 \cdot \pi}{4} = \frac{\pi}{4} \tag{8}$$

$$großer \quad Viertelkreis \quad mit \quad R = 2 \qquad A_2 = \frac{R^2 \cdot \pi}{4} = \pi \tag{9}$$

Die Kurve k teilt den Kreisbogensektor zwischen r und R im Verhältnis:

$$\frac{A - A_1}{A_2 - A} = \frac{2.53185 - \frac{\pi}{4}}{\pi - 2.53185} = 2.86424 \tag{10}$$

1.3 Kurvenlänge

Das Bogendifferential für Funktion in Parameterform lautet:

$$ds = \sqrt{\dot{u}^2 + \dot{v}^2} \cdot dt \tag{11}$$

$$ds = \sqrt{\left(1 + \frac{1 - t}{\sqrt{(1 + 2 \cdot (-1 + t) \cdot t)^3}}\right)^2 + \left(1 + \frac{t}{\sqrt{(1 + 2 \cdot (-1 + t) \cdot t)^3}}\right)^2} \cdot dt$$

Eine geschlossene Lösung für das Bogenintegral ist nicht möglich. Daher erfolgt nur die numerische Auswertung:

$$S = \int_0^1 \sqrt{\dot{u}^2 + \dot{v}^2} \cdot dt = 2.90275 \tag{12}$$

Lösungsweg von Steffen Mehlhos, D-07806 Neustadt / Orla

Herleitung der Polardarstellung für die Kurve

Die Aufgabe läßt sich eleganter lösen, wenn man die Darstellung als Parameterkurve vermeidet und direkt in Polarkoordinaten arbeitet. Ausgangspunkt ist die Geradengleichung durch die Punkte $\overline{P_1 P_2}$:

$$y = 1 - x \tag{13}$$

Die kartesischen Koordinaten werden gegen Polarkoordinaten ausgetauscht, wobei r_1 den Abstand zwischen Punkt R und dem Ursprung darstellt:

$$r_1 \sin\alpha = 1 - r_1 \cos\alpha \quad \rightarrow \quad r_1 = \frac{1}{\cos\alpha + \sin\alpha} \tag{14}$$

Zu diesem Radiusvektor r_1 ist der konstante Abstand $a = 1$ zu addieren (siehe Aufgabenstellung).

$$r(\alpha) = r_1 + 1 = \frac{1}{\cos\alpha + \sin\alpha} + 1 \tag{15}$$

Wer die Paramterdarstellung benötig, kann $r(\alpha)$ in die x und y-Komponente zerlegen.

$$x = r(\alpha)\,\cos\alpha, \qquad y = r(\alpha)\,\sin\alpha \tag{16}$$

Berechnung des Flächeninhalts

Der Flächeninhalt folgt aus der *Leibnizschen Sektorenformel* für Polarkoordinaten :

$$A = \frac{1}{2} \cdot \int\limits_{\alpha=0}^{\alpha=\frac{\pi}{2}} r^2 \cdot d\alpha = \frac{1}{2} \cdot \int\limits_{\alpha=0}^{\alpha=\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos\alpha + \sin\alpha} + 1 \right)^2 d\alpha \tag{17}$$

Die unbestimmte Integration über α liefert :

$$I = \frac{1}{2} \left(t + 2\sqrt{2}\,\mathrm{ArcTanh}\,[\frac{-1 + \tan\,[\frac{t}{2}]}{\sqrt{2}}] + \frac{1}{1 + \cot[t]} \right) \tag{18}$$

Nach Einsetzen der oberen und unteren Grenze erhält man für den Flächeninhalt :

$$A = \frac{1}{4}\,(2 + \pi + 4\sqrt{2}\,\mathrm{ArcCoth}\,[\sqrt{2}]) = 2.53185 \tag{19}$$

Kurvenlänge

Das Bogendifferential für Kurven in Polarkoordinaten lautet:

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\alpha = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\cos[t] + \sin[t]}\right)^2 + \frac{1 - \sin[2t]}{(\cos[t] + \sin[t])^4}}\, d\alpha \tag{20}$$

Das Computeralgebraprogramm *Mathematica* fand auch nach längerer Suche keine geschlossene Lösung für dieses komplizierte Bogendifferential, so das die Auswertung wie oben gezeigt numerisch erfolgt.

$$s = \int_{\alpha=0}^{\alpha=\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\cos[t] + \sin[t]}\right)^2 + \frac{1 - \sin[2t]}{(\cos[t] + \sin[t])^4}}\, d\alpha = 2.90275 \tag{21}$$