Kurvenkonstruktion

Ingmar Rubin, Berlin

20. Juli 2003

Eine Kurve c sei durch folgende Konstruktionsvorschrift definiert :

```
- zeichne ein rechtwinklig, kartesisches x-y Koordinatensystem
  mit dem Ursprung O(0,0)
- zeichne einen Kreis k1 mit Radius R und Mittelpunkt in M(R,0)
- definiere auf k1 einen Punkt P
- zeichne die Gerade g durch O(0,0) und P ein
- bezeichne den Winkel zwischen g und x-Achse mit t
- zeichne den Punkt A(a,0) ein, mit 0 < a < R
- errichte in A die Senkrechte s zur x-Achse
- kennzeichne den Schnittpunkt zwischen g und s mit B
- zeichne den Kreis k2 mit Mittelpunkt in B und Radius r = BP
- kennzeichne den zweiten Schnittpunkt zwischen g und k2 mit C
- durchlaufe P alle Punkte auf k2, so ist die Ortskurve von C die gesuchte Kurve c
```

1. Konstruiere die Kurve mit einem Programm der *Dynamischen Geometrie* z.B. EUKILID, GEONET, Zirkel und Lineal, WEB-Adressen zu den Programmen stehen unt www.matheraetsel.de/software

2. Leite eine Parameterdarstellung für die Kurve c ab. Benutze t als Parameter.

3. Die Kurve umschließt im linken Teil eine Fläche. Berechne die Fläche in Abhängigkeit von R,a !

Lösungsweg

Ortslinienverfolgung in EUKLID

Bei der gesuchte Kurve handelt es sich um die *Cissoide*, einer Kurve 3.Ordnung. Abbildung 1 zeigt das Lösungsbild, wie man es in einem Progragramm der *Dynamischen Geometrie* erhält. In diesen Programmen gibt es einen speziellen Menüpunkt zur *Ortskurvenverfolgung*.

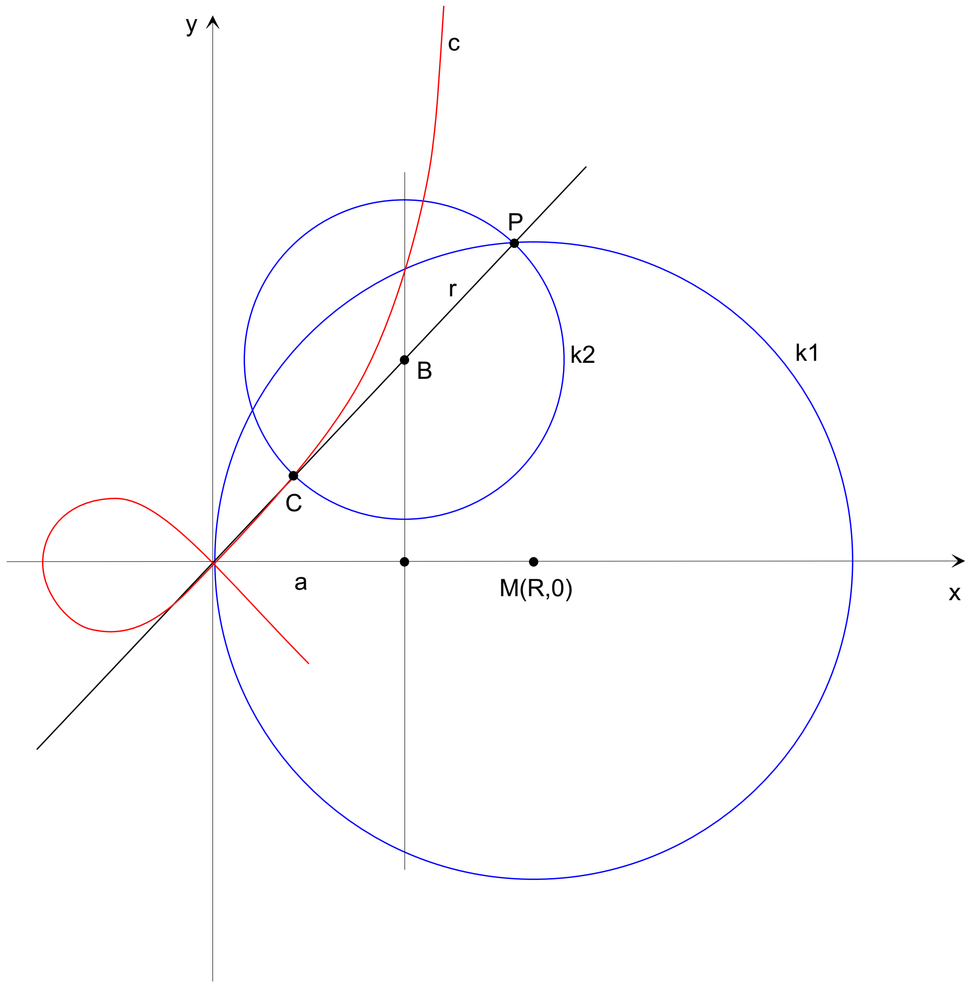

Abbildung 1: Skizze zur gesuchten Kurve

Parameterdarstellung der Kurve c

Wir beginnen mit der Parameterdarstellung für den Kreis k_1 mit Mittelpunkt in $M_1(0, R)$:

$$k_1 : \qquad x_1 = 2\,R\,\cos^2 t, \quad y_1 = 2\,R\,\sin t\,\cos t \tag{1}$$

Der Punkt B besitzt die Koordinaten $(a, a\cdot\tan t)$. Aus der Punktabstandsformel zu P kann der Radius r von k_2 bestimmt werden :

$$\overline{BP} : \quad (x_1 - a)^2 + (y_1 - a\,\tan t)^2 = r^2 \tag{2}$$

Diese Gleichung lösen wir nach r auf und erhalten :

$$r = \frac{a}{\cos t} - 2\,R\,\cos t \tag{3}$$

Die Gleichung für den Kreis k_2 mit dem Mittelpunkt in B lautet damit:

$$(x_2 - a)^2 + (y_2 - a\,\tan t)^2 = \left(\frac{a}{\cos t} - 2\,R\,\cos t\right)^2 \tag{4}$$

Wir bestimmen nun den unteren Schnittpunkt C zwischen der Geraden

$$y = x\,\tan t \tag{5}$$

und dem Kreis k_2 :

$$C: \quad x_c(t) = 2\,(a - R\,\cos^2 t), \quad y_c(t) = 2\,(a - R\,\cos^2 t)\,\tan t \tag{6}$$

Gleichung (6) ist die gesuchte Parameterdarstellung der Ortskurve vom Punkt C.

Flächenberechnung der Schleife

Die Kurve besitzt im Ursprung $O(0,0)$ einen sogenannten *Doppelpunkt*. Die zugehörigen Parameter t bestimmen wir aus der Lösung von :

$$x_c(t) = 2\,(a - R\,\cos^2 t) = 0, \quad \rightarrow \quad t_0 = \pm\,\arccos\left(\sqrt{\frac{a}{R}}\right) \tag{7}$$

Die Fläche für Kurven in Parameterdarstellung wird mit der *Leibnizschen Sektorenformel* bestimmt:

$$A = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (x\,\dot{y} - \dot{x}\,y)\,dt \tag{8}$$

Wir benötigen die 1.Ableitung der Funktionen $x_c(t)$ und $y_c(t)$ nach t :

$$\dot{x}_c = 4\,R\,\cos t\,\sin t, \quad \dot{y}_c = \frac{2\,a}{\cos^2 t} - 2\,R\,\cos 2\,t \tag{9}$$

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \frac{[R + R\,\cos(2\,t) - 2\,a]^2}{2\,\cos^2(t)}\,dt \tag{10}$$

Mit den Integrationsgrenzen :

$$t_1 = -\arccos\left(\sqrt{\frac{a}{R}}\right), \quad t_2 = \arccos\left(\sqrt{\frac{a}{R}}\right) \tag{11}$$

erhält man den Flächeninhalt der Schleife zu :

$$A = 2\,\sqrt{a\,(R-a)}(2\,a + R) + 2\,R\,(R - 4\,a)\,\arccos\left(\sqrt{\frac{a}{R}}\right) \tag{12}$$