Funktion gesucht

Michael Heerdegen, Apolda

1. September 2002

Gegeben sei der Punkt $P(x_p, y_p)$ mit $y_p \neq 0$. Man zeige, dass es genau eine Funktion $f(x)$ gibt, die folgende Eigenschaft besitzt :

1. f ist dreimal differenzierbar,
2. Für alle $x \in R$ gilt $f''(x) \neq 0$,
3. Für jeden Punkt Q der $x-$ Achse ist die Mittelsenkrechte von $\overline{PQ}$ Tangente an den Graph von f.

Lösungsvorschlag

Wir erinnern uns an die Definition der Parabel :

Die Parabel ist eine Ortslinie, deren Punkte von einer vorgegebenen Geraden, der Leitgeraden, und einem vorgegebenen Punkt P, dem Brennpunkt (Focus), gleichen Abstand haben. Den Abstand der Leitgeraden vom Brennpunkt bezeichnet man als Parameter a der Parabel.

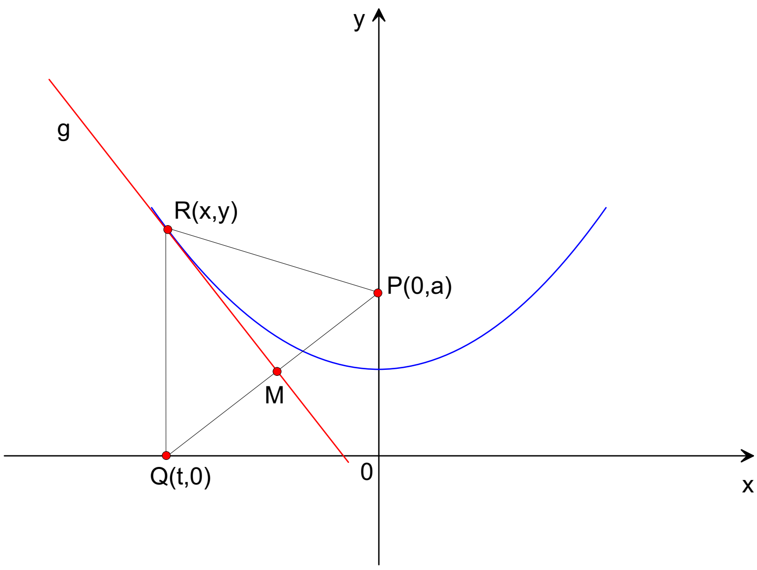

Abbildung 1: Skizze zur Parabelkonstruktion

Sei die $x-$Achse eines rechtwinklig, kartesischen Koordinatensystems die Leitgerade bei der Parabelkonstruktion. Befinde sich der Punkt P auf der $y-$Achse im Abstand a vom Ursprung. Der Punkt $Q(t,0)$ läuft auf der $x-$ Achse mit dem Parameter $t = x$. Die Strecke $\overline{PQ}$ hat dann den Anstieg :

$$\overline{PQ}: \qquad m_1 = -\frac{a}{t} \tag{1}$$

Der Mittelpunkt M von $\overline{PQ}$ besitzt die Koordinaten:

$$M = \left(\frac{t}{2}, \frac{a}{2}\right) \tag{2}$$

Aus m_1 und M kann die Gleichung der Mittelsenkrechten g zur Strecke $\overline{PQ}$ ermittelt werden:

$$g: \qquad y = m_2\,x + n \quad \rightarrow \quad m_2 = -\frac{1}{m_1} = \frac{t}{a} \tag{3}$$

Die Koordinaten von M müssen der Geradengleichung g genügen :

$$\frac{a}{2} = \frac{t}{a} \cdot \frac{t}{2} + n \quad \rightarrow \quad n = \frac{a^2 - t^2}{2\,a} \tag{4}$$

Die Ortskurve vom Punkt $R(x_r, y_r)$, als Schnittpunkt zwischen g und der Senkrechten $x = t$ beschreibt für alle t aus dem Intervall $-\infty < t < +\infty$ eine Parabel.

$$x_r = t, \qquad y_r(t) = m_2 \cdot t + n = \frac{t^2}{a} + \frac{a^2 - t^2}{2\,a} = \frac{t^2}{2\,a} + \frac{a}{2} \tag{5}$$

Ersetzen wir den Parameter t durch x erhalten wir die bekannte Parabelgleichung. Sie genügt den Eigenschaften aus der Aufgabenstellung :

$$y(x) = \frac{x^2}{2\,a} + \frac{a}{2}, \quad y'(x) = \frac{x}{a}, \quad y''(x) = \frac{1}{a} \neq 0, \quad y'''(x) = 0 \tag{6}$$

Der Anstieg m_2 der Mittelsenkrechten ist identisch mit dem Anstieg der Parabel im Kurvenpunkt $x = t$:

$$m_2 = \frac{t}{a}, \qquad y'(x) = \frac{x}{a} \quad x \rightarrow t \quad y'(t) = \frac{t}{a} \tag{7}$$

Für $t = 0$ laufen die Punkte M und R ineinander. Man erhält dann die waagerechte Tangente an die Parabel im Punkt $M = R(0, \frac{a}{2})$ wie Abbildung 2 zeigt.

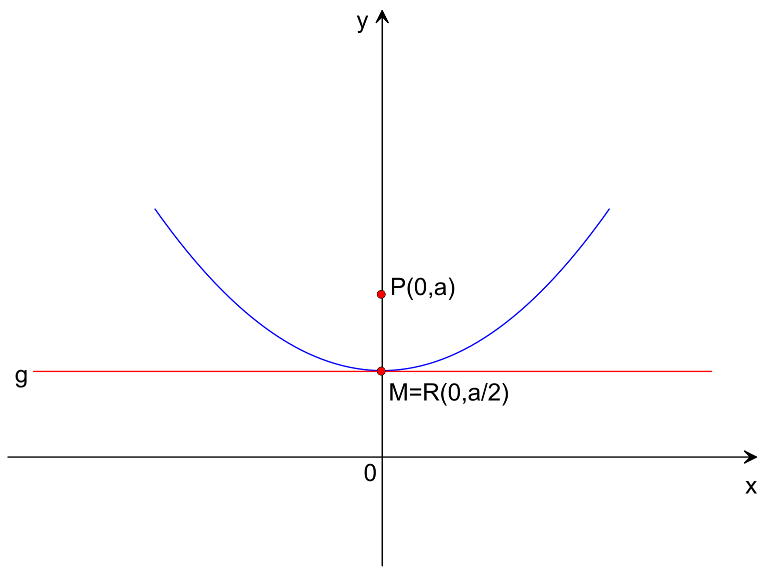

Abbildung 2: waagerechte Tangente an die Parabel für $t = 0$