Verzwickte Funktion

Eine Aufgabe von Peter G. Nischke, Berlin

15. September 2001

Vorgelegt sei die implizite Funktionsgleichung nach *Euler*:

$x^y = y^x$

1. Zerlegen Sie die Funktion durch geeignete Parametrisierung und bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung !
2. Zeichen Sie den Funktionsgraphen im Intervall $0 \leq x \leq 10$
3. Zeichnen Sie das Höhenrelief der Funktion $z = y^x - x^y$

Punktezahl=8

Graph der Funktion und Lösungsmenge der Gleichung

Zunächst erkennt man, daß die Funktion für $y = x$ im Intervall $0 \leq x \leq \infty$ erfüllt ist. Die Gerade $y = x$ ist aber nicht die einzige Lösungskurve.

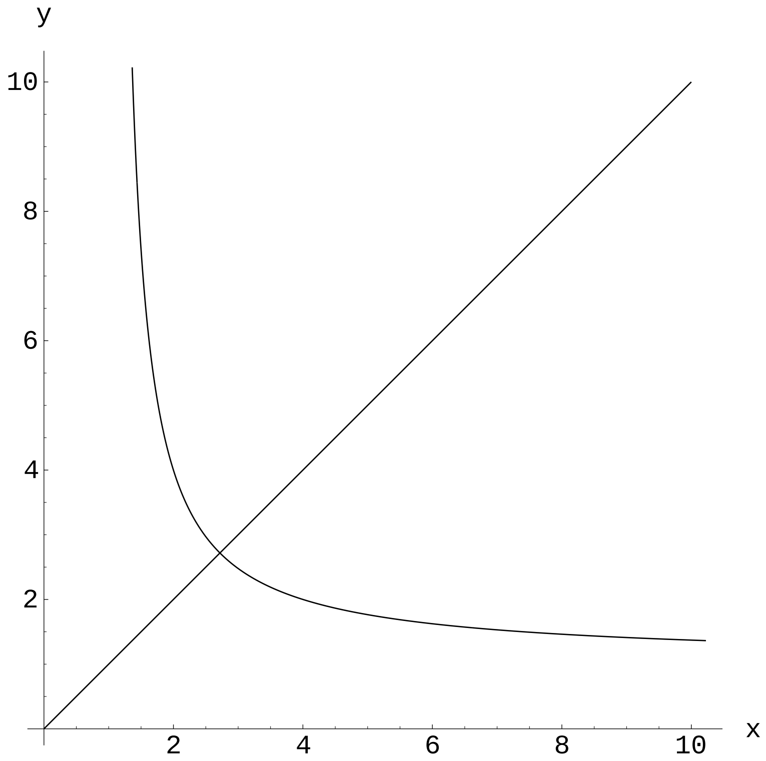

Abbildung 1: Lösungsmenge der Gleichung $y^x = x^y$ im Intervall $0 \leq x \leq 10$

Durch ein wenig Probieren findet man das Lösungspaar $P_1(2,4)$, $P_2(4,2)$. Mit dem folgenden Ansatz können wir die Funktion parametrisieren.

$$y = x\,(1+t) \tag{1}$$

Einsetzen in die Ausgangsgleichung liefert :

$$x^{x\,(1+t)} = [x\,(1+t)]^x \tag{2}$$

Auf beiden Seiten der Gleichung wird nun die $x-$ te Wurzel gezogen :

$$x^{1+t} = x\,(1+t) \quad \rightarrow \quad x \cdot x^t = x\,(1+t) \tag{3}$$

und nach x aufgelöst

$$x^t = 1 + t \quad \rightarrow \quad x_1(t) = (1+t)^{\frac{1}{t}}, \qquad 0 < t < \infty \tag{4}$$

Das Ergebnis $x = x_1(t)$ setzen wir in den Parameteransatz (1) ein :

$$y_1(t) = (1+t)^{\frac{1}{t}}\,(1+t) = (1+t)^{\frac{t+1}{t}} \qquad 0 < t < \infty \tag{5}$$

Als Grenzwerte erhält man:

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e, \qquad \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{t+1}{t}} = e \tag{6}$$

$$\lim_{t\to \infty}(1+t)^{\frac{1}{t}} = 1, \qquad \lim_{t\to \infty}(1+t)^{\frac{t+1}{t}} = \infty \tag{7}$$

Diese Kurve beschreibt den oberen Kurvenast aus Abbildung 1. Auf Grund der $x - y$ Symmetrie erhält man für den unteren Kurvenast :

$$x_2(t) = (1+t)^{\frac{t+1}{t}}, \quad y_2(t) = (1+t)^{\frac{1}{t}}, \qquad 0 < t < \infty \tag{8}$$

Damit besteht die Lösungsmenge aus den Kurvenästen :

$$c_1[x_1(t),\, y_1(t)], \qquad c_2[(x_2(t),\, y_2(t)], \qquad c_3[y = x] \tag{9}$$

Höhenrelief für $z = x^y - y^x$

Betrachtet man die Gleichung als Funktion $z = f(x, y) = x^y - y^x$ so ist offenbar die Lösungskurve gleich der Schnittmenge mit der Ebene $z = 0$. Funtionenplotter oder Computeralgebraprogramme können das Höhenrelief der Funktion $z = x^y - y^x$ visiualisieren:

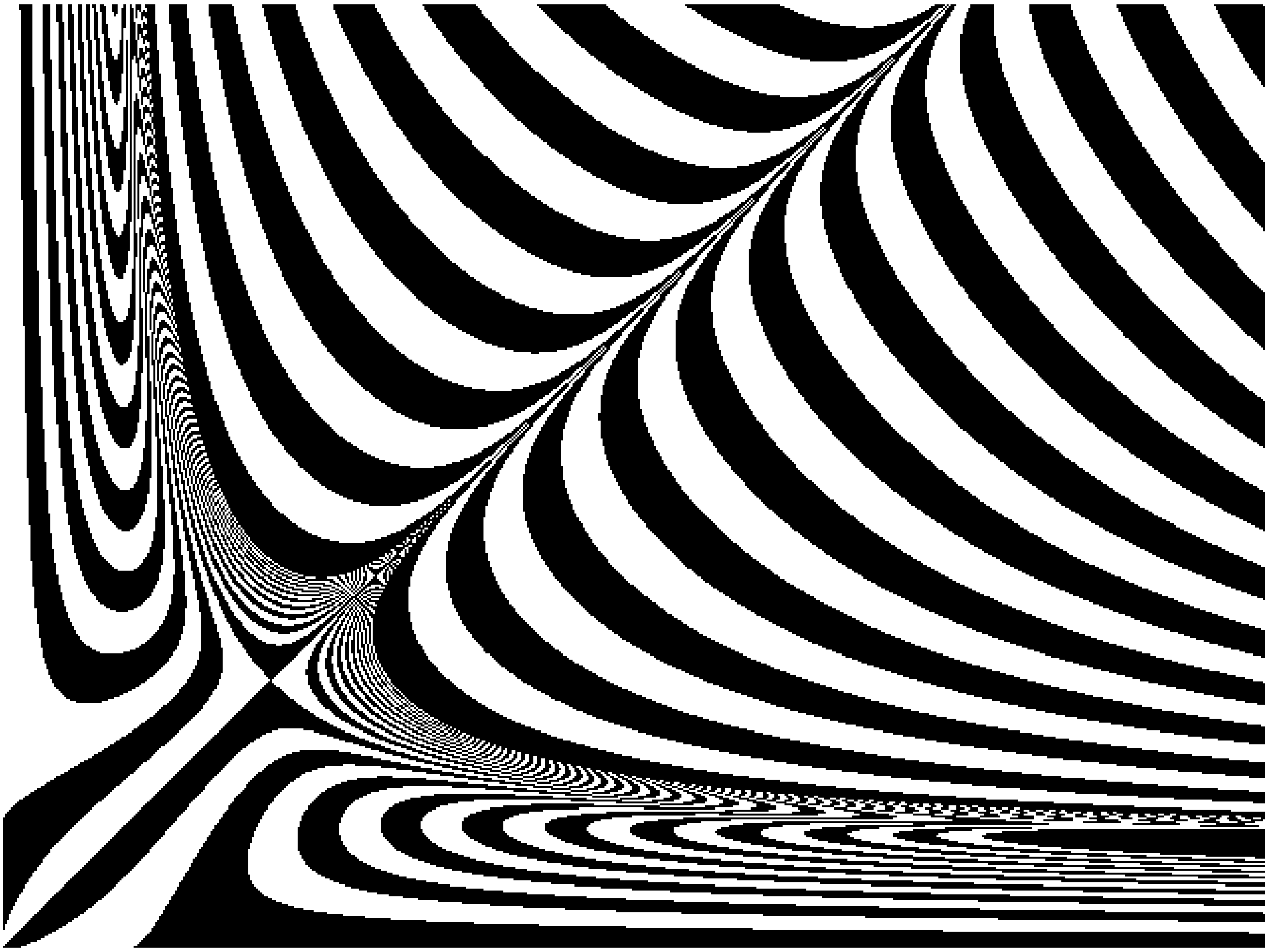

Abbildung 2: Höhenrelief der Funktion $z = x^y - y^x$ im Intervall $0 \leq x \leq 10$