

Zwei Türme

Quantum Mathematik Magazin

März / April 2000

Zwei kreisrunde Türme mit der gleichen Höhe haben unterschiedliche Durchmesser. Eine spiralförmige Treppe windet sich um jeden der Türme vom Boden bis zur Spitze. Der Anstieg beider Treppen ist gleich und konstant. Welche der Treppen ist länger?



Abbildung 1: Skizze zur Aufgabenstellung

Lösungsweg

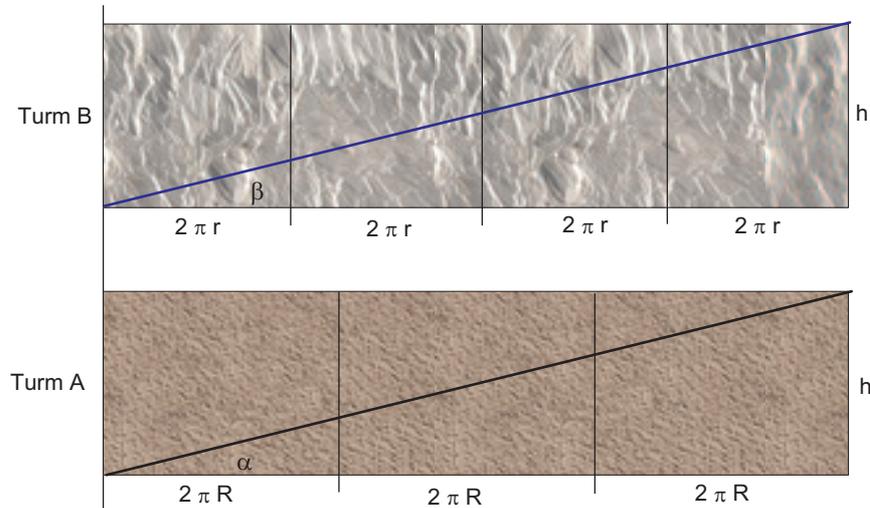


Abbildung 2: Skizze zum Lösungsweg

Wir bezeichnen die Türme mit A und B , wobei A den Radius R und B den Radius r besitze, mit $R > r$. Wir rollen Turm A in der Ebene so oft hintereinander ab, bis die Treppengerade die Höhe h erreicht hat. Der Anstiegswinkel der Treppengerade sei α . Die Länge der Treppe beträgt dann:

$$L_A = \frac{h}{\sin \alpha} \quad (1)$$

In der gleichen Art rollen wir den Turm B in der Ebene ab, wobei auf Grund des kleineren Radius r wir den Turm B öfter als Turm A abrollen müssen, bis die Treppengerade die Höhe h erreicht hat (Abbildung 2). Die Länge der Treppengerade beträgt:

$$L_B = \frac{h}{\sin \beta} \quad (2)$$

Da beide Treppen den gleichen Anstieg haben, muß $\alpha = \beta$ sein. Damit ist aber:

$$L_A = L_B = \frac{h}{\sin \alpha} \quad (3)$$

d.h. beide Treppen sind gleich lang.