Aufgabe ι 58

Dr.R.Mavrova und P.Kirova, Plovdiv, Bulgarien

Zeitschrift *Die Wurzel*, Heft 12/02

Die Längen der parallelen Seiten eines gleichschenkligen Trapezes stehen im Verhaltnis $3 \div 2$. Die größere dieser Seiten ist Durchmesser eines Kreises, der die andere der parallelen Seiten schneidet. Die Teile dieser Seite, die außerhalb des Kreises liegen seien zusammen genauso lang wie der innerhalb des Kreises liegende Teil.
In welchen Verhältnis teilt der Kreis die Schenkel des Trapezes ?

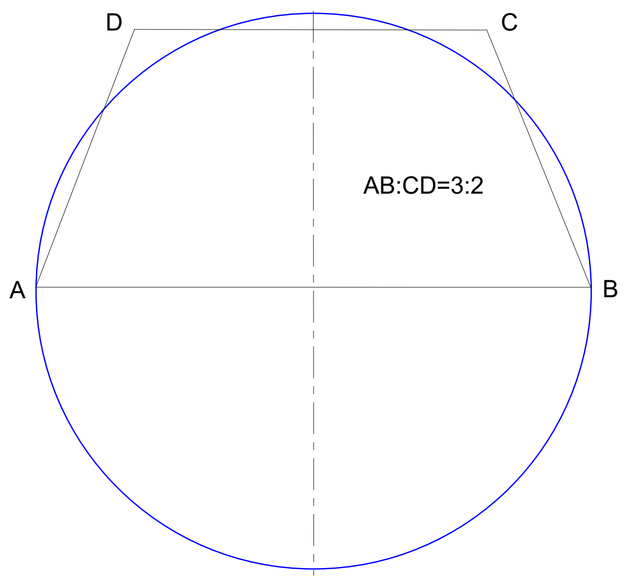

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabe

Lösungsvorschlag, Ingmar Rubin, Berlin

Bezeichne M den Mittelpunkt des Kreises k und r seinen Radius. Die Schnittpunkte zwischen Kreis und Trapezseite CD seien E, G. Die Höhe des Trapezes ist Strecke $MF = h$.

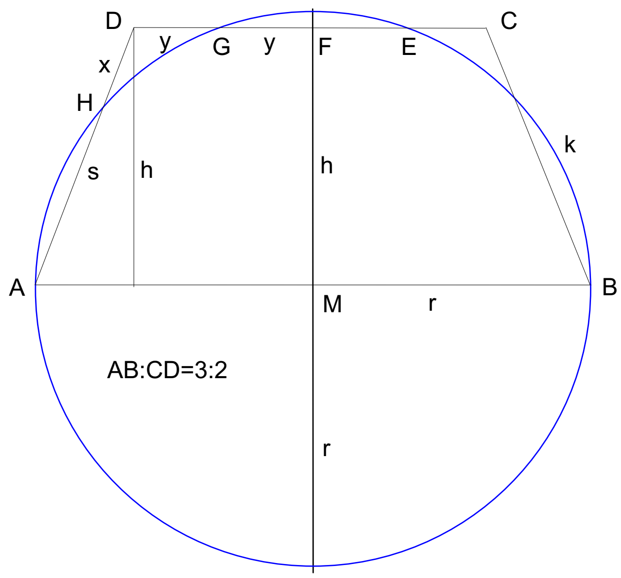

Abbildung 2: Skizze zum Lösungsweg

Aus der Aufgabenstellung ist bekannt :

$$\frac{AB}{CD} = \frac{3}{2}, \quad AB = 2\,r, \quad CD = 4\,y \quad \rightarrow \quad y = \frac{r}{3} \tag{1}$$

Die Höhe h folgt aus dem *Sehnensatz* im Kreis k :

$$(r+h)\cdot(r-h) = y^2 \quad \rightarrow \quad r^2 - h^2 = \frac{1}{9}\,r^2 \quad \rightarrow \quad h^2 = \frac{8}{9}\,r^2 \tag{2}$$

Die Seite $s = AD$ berechnen wir aus dem *Satz des Pythagoras*:

$$s^2 = h^2 + (r - 2\,y)^2 \quad \rightarrow \quad s^2 = \frac{8}{9}\,r^2 + \left(\frac{3}{3} - \frac{2}{3}\right)^2 r^2 = r^2 \tag{3}$$

Die Teilung der Strecke CD - entsprechend der Aufgabenstellung - ist genau dann erfüllt, wenn $s = r$ gilt. Das Verhältnis $AH \div HD$ erhalten wir aus dem *Sehnen-Sekantensatz* ausgehend vom Punkt D.

$$DG \cdot DE = DH \cdot DA \quad \rightarrow \quad y \cdot (3\,y) = x \cdot s \tag{4}$$

Mit $y = r/3$ und $s = r$ erhalten wir :

$$\frac{3}{9}\,r^2 = x \cdot r \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{3}\,r \tag{5}$$

Demnach beträgt das Verhältnis $AH \div HD = 2 \div 1$.