Fünf Kreise im Quadrat

Eine Aufgabe aus der *Japanischen Tempelgeometrie*

10. September 2003

Gegeben sei das Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a. In dem Quadrat werden fünf gleichgroße Kreise so angeordnet, das sich je zwei Kreise in einem Punkt berühern. Weiterhin haben je drei Kreise zwei gemeinsame, parallele Tangenten, die je in einem Eckpunkt des Quadrates beginnen (Abbildung 1). Gesucht ist der Radius r der fünf Kreise in Abhängigkeit von a. Punktezahl=6

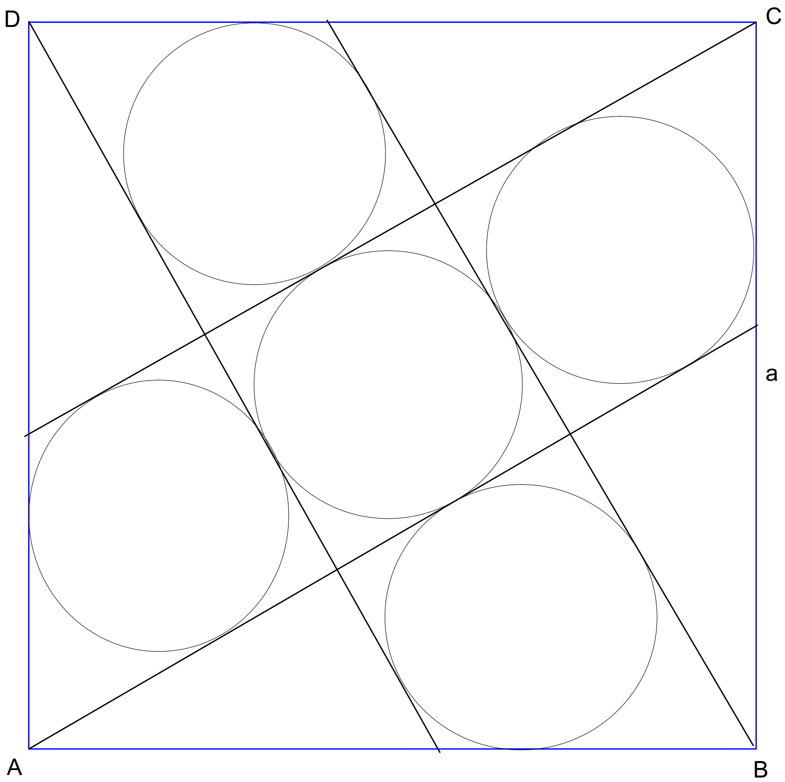

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabenstellung

Lösungsweg

Wir bezeichnen die Strecken und Punkte entsprechend Abbildung 2. Zunächst

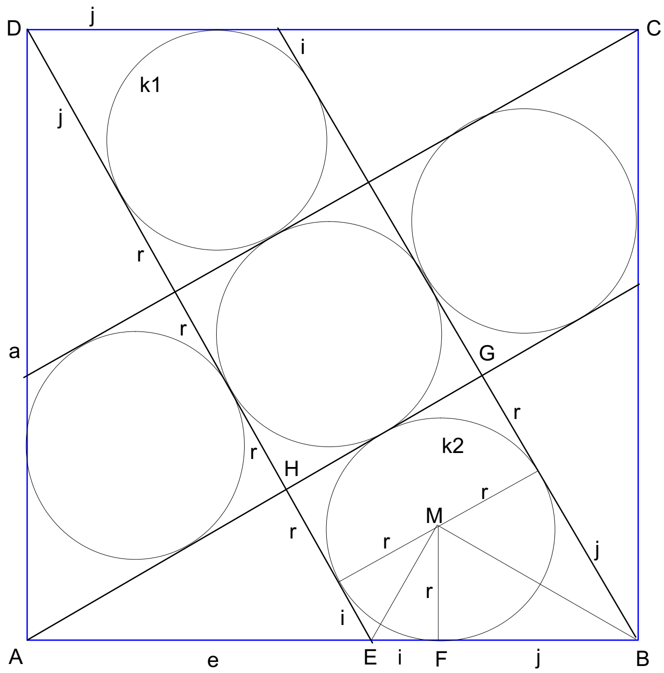

Abbildung 2: Skizze zur Lösung

machen wir uns den Satz vom gemeinsamen Tangentabschnitt an einen Kreis zu nutze:
Die Tangentenabschnitte von einem äußeren Punkt an einen Kreis sind stets gleich lang. Wir berachten den Punkt B und den Kreis k_2. Die gemeinsamen Tangentenabschnitte sind die Strecken j. Gleiches gilt für den Punkt E und die eingezeichneten Abschnitte i an k_2. Die Seite $a = \overline{AB}$ setzt sich aus drei Abschnitten zusammen:

$$\overline{AB}: \qquad a = e + i + j \tag{1}$$

Vom Punkt D an den Kreis k_1 erhalten wir die Tangentenabschnitte j. Für die Transversale $\overline{DE}$ gilt:

$$\overline{DE} = j + i + 4\,r \tag{2}$$

Das Dreieck EAD ist rechtwinklig und es gilt der *Satz des Pythagoras*:

$$\triangle EAD: \qquad a^2 + e^2 = (j + i + 4\,r)^2 \tag{3}$$

Die Dreiecke AEH und ABG sind einander ähnlich und es gilt die Verhältnisgleichung:

$$\triangle AEH \sim \triangle ABG: \qquad \frac{e}{r+i} = \frac{a}{r+j} \tag{4}$$

Im rechtwinkligen Dreieck EMB gilt der Höhensatz:

$$\triangle EMB : \qquad i \cdot j = r^2 \tag{5}$$

Die Gleichungen (1) bis (5) werden mit einem Computeralgebrasystem nach den größen e, i, j, r aufgelöst.

$$e = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad i = \frac{a}{12}\left(3 - \sqrt{3}\right), \quad j = \frac{a}{4}\left(3 - \sqrt{3}\right), \quad r = \frac{a}{4}\left(\sqrt{3} - 1\right)$$

Alle Strecken lassen sich als *algebraische Zahl* darstellen. Das gestellte Sangakuproblem kann damit als eine Zirkel- und Lineal Konstruktion ausgeführt werden.