Winkel im Rechteck gesucht

Mathematikzeitschrift *Die Wurzel*

27. Januar 2002

Gegeben ist ein Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlänge $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$. M und N sind zwei Punkte auf den Seiten $\overline{BC}$ bzw. $\overline{CD}$, so dass für den Umfang u des Dreiecks $\triangle CMN$ gilt: $u = a + b$. Zusätzlich ist Strecke $\overline{NA}$ die Winklehalbierende von $\sphericalangle DNM$.

- Welche Beziehung besteht zwischen a und b ?
- Welchen Weite hat der Winkel $\sphericalangle MAN$?

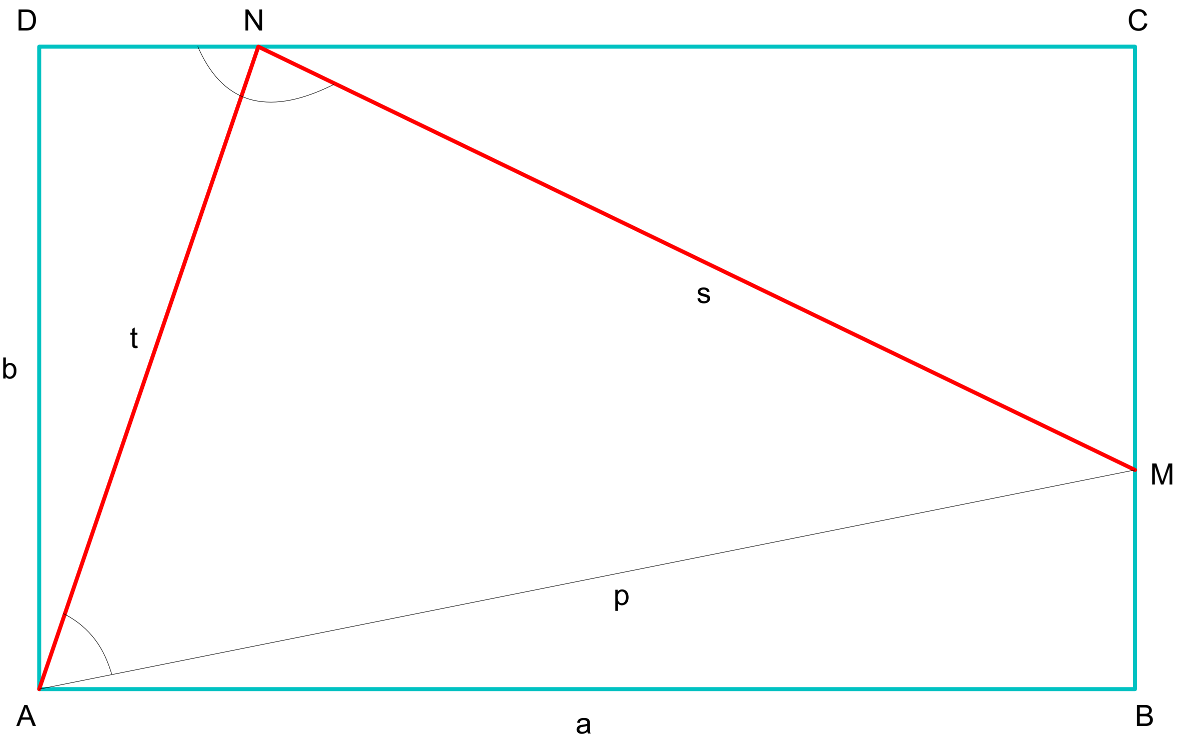

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabenstellung

Lösung

Wir bezeichnen die Strecken im Viereck $ABCD$ nach Abbildung 2.

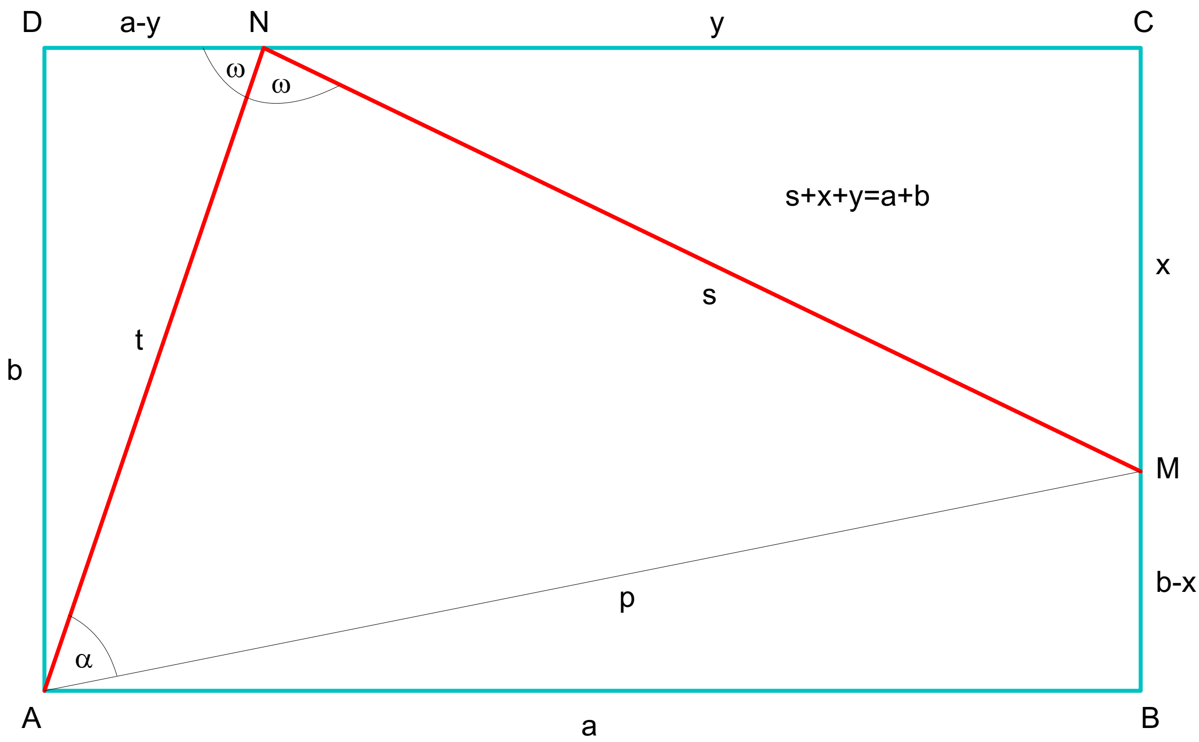

Abbildung 2: Skizze zur Originallösung

Aus der Aufgabe wissen wir :

$$\omega = \sphericalangle AND = \sphericalangle ANM, \qquad s + x + y = a + b \tag{1}$$

Mit Hilfe des *Satz vom Pythagoras* und dem *Kosinussatz* lassen sich folgende Gleichungen formulieren:

$$\triangle MCN : \qquad s^2 = x^2 + y^2 \tag{2}$$

$$\triangle AND : \qquad t^2 = b^2 + (a - y)^2 \tag{3}$$

$$\triangle AMN : \qquad p^2 = t^2 + s^2 - 2\,s\,t\,\cos\omega \tag{4}$$

Den Kosinus von Winkel ω berechnen wir aus dem rechtwinkligen Dreieck ADN:

$$\triangle ADN : \qquad \cos\omega = \frac{a - y}{t} \tag{5}$$

In Gleichung (4) ersetzen wir nun s^2, t^2 und $\cos\omega$ mit den Termen aus (2),(3) und (5) :

$$\triangle AMN : \qquad p^2 = b^2 + (a - y)^2 + x^2 + y^2 - 2\,s\,(a - y) \tag{6}$$

Schließlich ersetzen wir p^2 mit:

$$\triangle ABM: \qquad p^2 = a^2 + (b-x)^2 \tag{7}$$

$$a^2 + (b-x)^2 = b^2 + (a-y)^2 + x^2 + y^2 - 2\,s\,(a-y) \tag{8}$$

Nach dem Zusammenfassen ergibt sich :

$$b\,x + y\,(s+y) = a\,(s+y) \tag{9}$$

Die Gleichungen (1), (2) und (9) werden mit einem Computeralgebrasystem nach a, b aufgelöst :

$$a = \frac{1}{2}\,\left(x + y + \sqrt{x^2+y^2}\right), \qquad b = \frac{1}{2}\,\left(x + y + \sqrt{x^2+y^2}\right) \tag{10}$$

Damit ist das gesuchte Rechteck ein Quadrat, bei dem die Seiten a, b im Verhältnis $1 \div 1$ stehen.

Berechnung des Winkels $\alpha = \sphericalangle MAN$

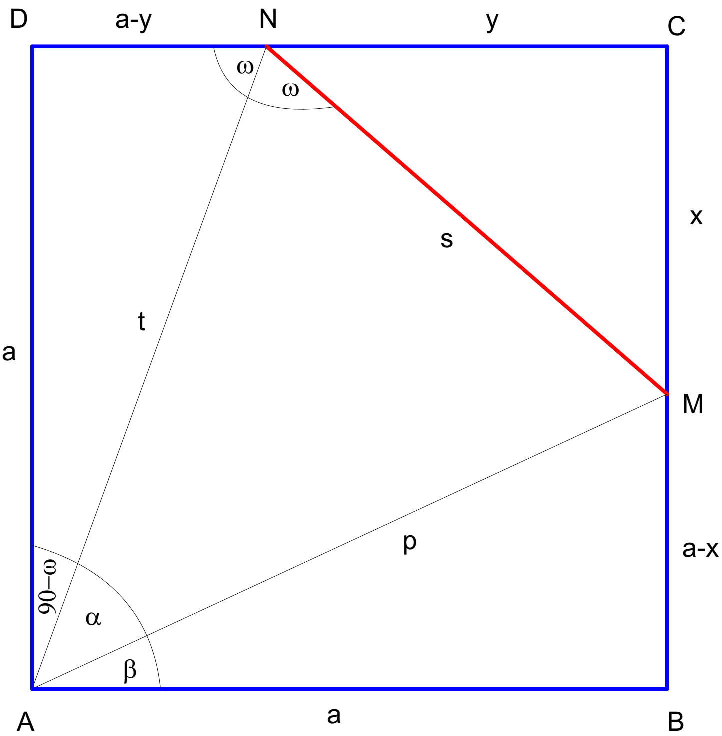

Abbildung 3: Berechnung des Winkles $\sphericalangle MAN$

Ausgangspunkt unserer Überlegung ist Abbildung 3. Offensichtlich sind die Winkel $\omega = \sphericalangle AND$ und $\alpha + \beta = \sphericalangle NAB$ Stufenwinkel zur Strecke $\overline{AN}$ und damit gleich groß.

$$\omega = \alpha + \beta \quad \rightarrow \quad \beta = \omega - \alpha \tag{11}$$

Mit den Streckenbezeichner aus Abbildung 3 und dem Tangenssatz im rechtwinkligen Dreieck erhalten wir:

$$\tan\omega = \frac{a}{a-y}, \qquad \tan\beta = \tan\omega - \alpha = \frac{a-x}{a} \tag{12}$$

Aus den Additiontheoremen der Tangensfunktion folgt die Zerlegung:

$$\tan\omega - \alpha = \frac{\tan\omega - \tan\alpha}{1 + \tan\omega\,\tan\alpha} = \tan\beta = \frac{a-x}{a} \tag{13}$$

Nun ersetzen wir $\tan\omega$ durch den Term aus (12) und Seite a mit der Beziehung aus (10) :

$$\frac{\frac{2\,x}{x+y+\sqrt{x^2+y^2}} + (\tan\alpha\, y + \frac{1}{2}\,(x+y+\sqrt{x^2+y^2}) - \frac{1}{2}\tan\alpha\,(x+y+\sqrt{x^2+y^2}))}{(\,-y + \frac{1}{2}\,(x+y+\sqrt{x^2+y^2}) + \frac{1}{2}\tan\alpha\,(x+y+\sqrt{x^2+y^2}))} = 1 \tag{14}$$

Nach dem Zusammenfassen und Vereinfachen erhalten wir :

$$\frac{(-1+\tan\alpha)\,\sqrt{x^2+y^2}}{(1+\tan\alpha)\,x + (-1+\tan\alpha)\,y + (1+\tan\alpha)\,\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \tag{15}$$

Der Term ist genau dann Null, wenn die Zählerfunktion Null wird. Da $\sqrt{x^2+y^2} = s > 0$ gilt, folgt :

$$(-1+\tan\alpha) = 0 \quad \rightarrow \quad \tan\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad \alpha = 45^\circ \tag{16}$$

Geometrische Lösung

Mit der Erkenntnis, das die Rechteckseiten im Verhältniss $1 \div 1$ stehen kann der Winkel α aus rein geometrischen Überlegungen abgeleitet werden.

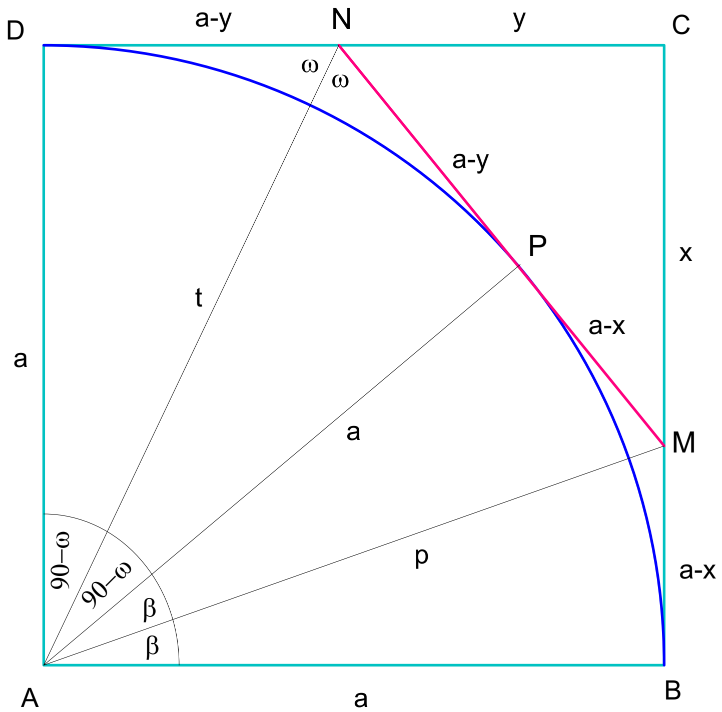

Abbildung 4: Berechnung des Winkles $\sphericalangle MAN$

Wir zeichnen das Quadrat $ABCD$. Vom Punkt A aus tragen wir einen Viertelkreisbogen mit dem Radius $r = \overline{AB}$ ab(Abbildung 4). Vom Punkt M ziehen wir die Tangente an den Viertelkreisbogen und bezeichnen den Berüherungspunkt mit P. Die Tangente wird über P hinaus bis zum Schnittpunkt N mit Seite $\overline{CD}$ verlängert. Für die gemeinsamen Tangentenabschnitte gilt :

$$\overline{BM} = \overline{MP} = a - x, \qquad \overline{PN} = \overline{ND} = a - y \tag{17}$$

Für jede Lage von M auf $\overline{BC}$ ist die Bedingung $u = a + b = 2\,a$ erfüllt:

$$u = x + y + a - x + a - y = 2\,a \tag{18}$$

Im Drachenviereck $ABMP$ ist Strecke $p = \overline{AM}$ die Winkelhalbirende von $\sphericalangle BAM = 2\,\beta$. Ebenso ist Strecke $t = \overline{AN}$ die Winkelhalbierende im Drachenviereck $ADNP$. Daraus erhalten wir eine Bestimmungsgleichung für den gesuchten Winkel $\alpha = \sphericalangle MAN$:

$$2\,\beta + 2 \cdot (90^\circ - \omega) = 90^\circ \quad \rightarrow \quad \alpha = \beta + 90^\circ - \omega = 45^\circ \tag{19}$$