Drei Kreise im Dreieck

Ein Problem von G.F.Malfatti, 1731-1807

29. Juli 2006

Gegeben sei das Dreieck ABC. Zeichne drei Kreise k_1, k_2, k_3 im Inneren von $\triangle ABC$, von denen jeder zwei Dreieckseiten und mindestens einen der übrigen zwei Kreise berührt (Abbildung 1). Die Konstruktion ist *mit Zirkel und Lineal* auszuführen.
Hinweis: Sehr hilfreich für die Konstruktion sind die Programme der *dynamischen Geometrie* z.B. EUKLID, Zirkel und Lineal (ZuL) oder GEONET.

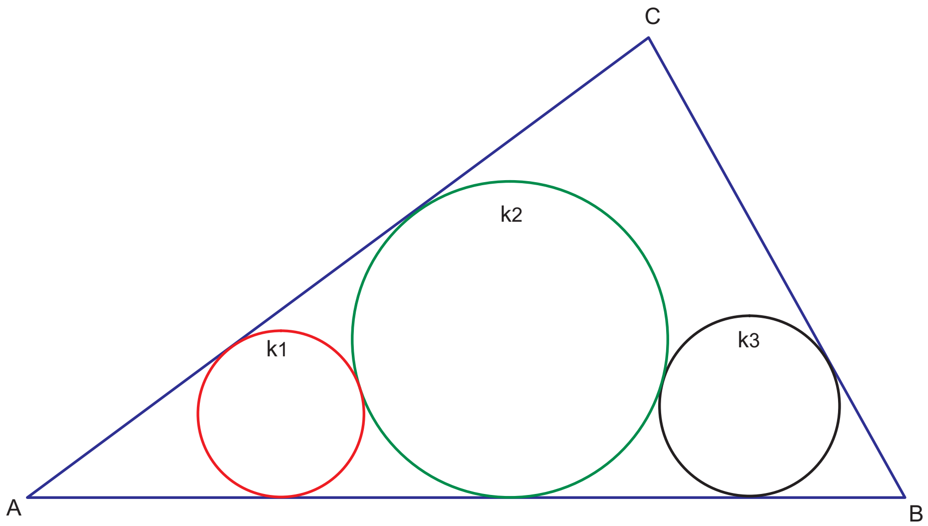

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabenstellung

Vorbetrachtung: Lage der Kreismittelpunkte

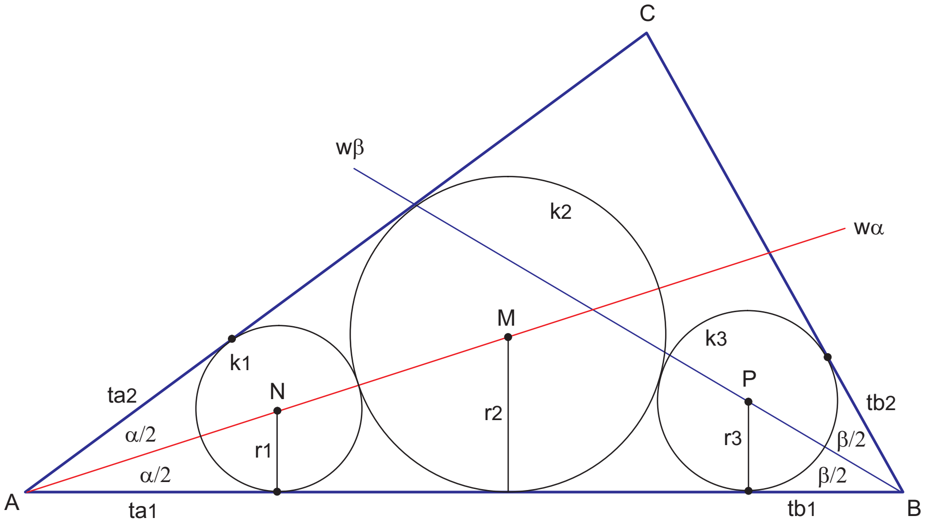

Abbildung 2: Lage der Kreismittelpunkte auf den Winkelhalbierenden

Die Tangentenabschnitte ta_1 und ta_2 vom Punkt A an den Kreis k_1 sind gleich lang. Aus dieser Symmetrie folgt, dass der Mittelpunkt N von k_1 auf der Winkelhalbierenden vom Winkel $\alpha = \sphericalangle BAC$ liegt.
Die gleiche Betrachtung gilt für den Mittelpunkt von k_2. Die Tangentenabschnitte tb_1 und tb_2 vom Punkt B an den Kreis k_3 sind gleich lang, weshalb der Mittelpunkt P von k_3 auf der Winkelhalbierenden des Winkels $\beta = \sphericalangle ABC$ liegt (Abbildung 2).

Die Kreisradien sind voneinander abhängig. Gibt man sich z.B. r_3 vor, so folgen daraus r_2 und r_1. Es gibt daher unendlich viele Tripel r_1, r_2, r_3, die das Berüherungsproblem von *Malfatti* erfüllen. In den folgenden Abschnitten wird schrittweise eine *Zirkel und Lineal* Konstruktionen für die drei Kreise gezeigt.

Lösungsvorschlag

von Peter Stratmann, Bonn

Wir zerlegen das Problem in drei Teilaufgaben:

1. Konstruktion von Kreis k_3 bei gegebenen Dreieck ABC
2. Konstruktion von Kreis k_2 bei gegebenen Kreis k_3
3. Konstruktion von Kreis k_1 bei gegebenen Kreis k_2

Aufgabenstellung 1: Konstruktion von Kreis k_3 bei gegebenen Dreieck ABC

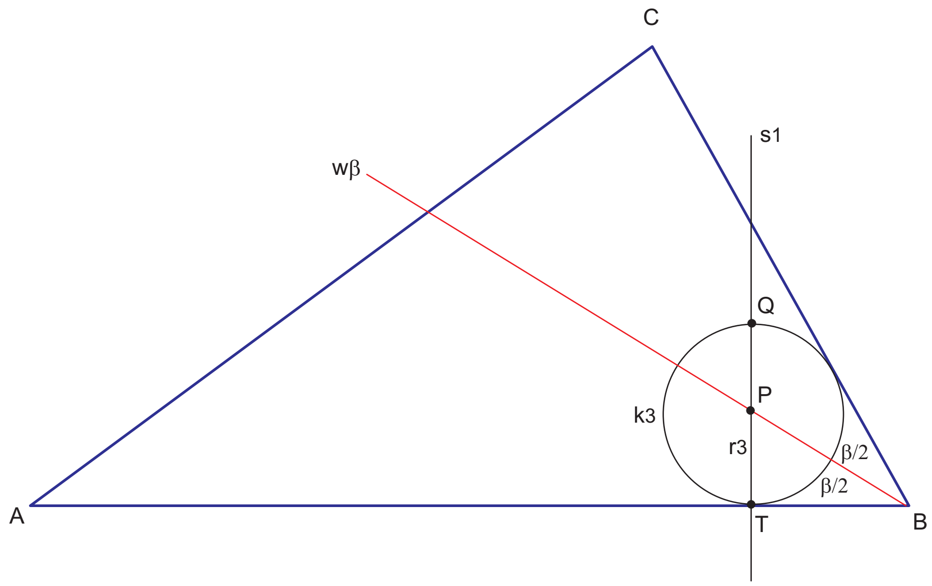

Abbildung 3: Konstruktion von Kreis k_3 bei gegebenen Dreieck ABC

Aus der vorangehenden Betrachtung zur Lage der Kreismittelpunkte wissen wir, dass der Mittelpunkt vom Kreis k_3 auf der Winkelhalbierenden des Winkels $\beta = \sphericalangle ABC$ liegen muß. Den Radius r_3 von k_3 können wir frei wählen. Konstruktionsschritte:

- zeichne ein beliebiges Dreieck ABC
- konstruiere die Winkelhalbierende w_β vom Winkel $\beta = \sphericalangle ABC$
- definiere auf w_β innerhalb des Dreiecks ABC den Punkt P
- errichte im Punkt P die Senkrechte s_1 zur Seite AB
- bezeichne den Schnittpunkt zwischen s_1 und AB mit T
- zeichne um P den Kreis k_3 mit Radius $r_3 = \overline{PT}$

Aufgabenstellung 2: Konstruktion von Kreis k_2 aus gegebenen Kreis k_3

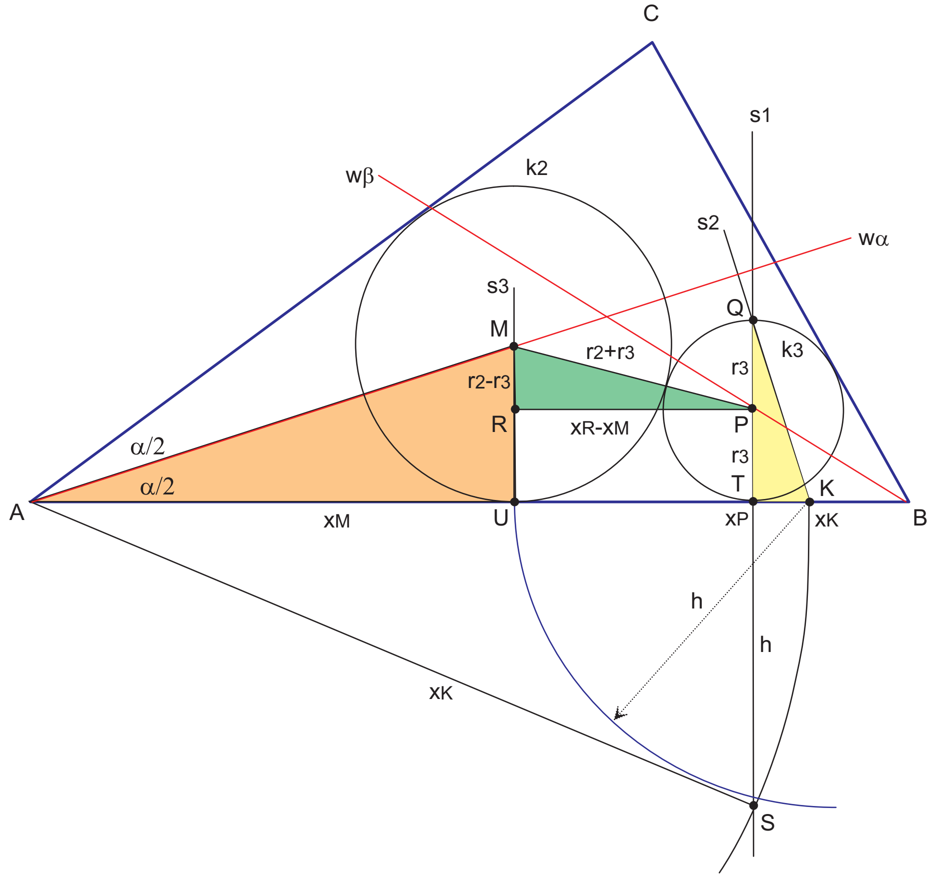

Abbildung 4: Konstruktion von k_2 aus k_3

Nachdem wir k_3 konstruiert haben, folgt die Konstruktion vom Kreis k_2, der k_3 berührt und die Dreieckseiten AB und AC tangiert. Wir setzen die im vorherigen Abschnitt begonnene Konstruktion fort:

- bezeichne den zweiten Schnittpunkt zwischen k_3 und s_1 mit Q
- konstruiere die Winkelhalbierende w_α von $\alpha = \sphericalangle BAC$
- fälle von Q das Lot s_2 auf w_α
- bezeichne den Schnittpunkt zwischen s_2 und der Seite AB mit K
- zeichne um A den Kreisbogen mit Radius $x_K = \overline{AK}$ bis zum Schnitt mit s_1
- bezeichne den Schnittpunkt zwischen dem Kreisbogen und s_1 mit S
- zeichne um K mit der Zirkelspanne $h = \overline{ST}$ einen Kreisbogen bis zum Schnitt mit AB

- bezeichne den Schnittpunkt zwischen dem Kreisbogen und AB mit U
- errichte in U die Senkrechte s_3 bis zum Schnitt mit w_α
- der Schnittpunkt zwischen s_3 und w_α ist der gesuchte Kreismittelpunkt M von k_2
- zeichne um M den Kreis k_2 mit Radius $r_2 = \overline{MU}$

Begründung zur Konstruktion :
Wir ergänzen die Skizze um die Strecken- und Punktebezeichner wie in Abbildung 3 gezeigt.
Die Dreiecke AMU und QTK sind einander ähnlich:

$$\triangle AMU \approx \triangle QTK: \quad \frac{2\,r_3}{x_K - x_P} = \frac{x_M}{r_2} \quad \rightarrow \quad r_2 = \frac{x_M \cdot (x_K - x_P)}{2\,r_3} \tag{1}$$

Im Berührungsdreieck MPR zwischen den Kreisen k_2 und k_3 gilt der *Satz des Pythagoras*:

$$\triangle MPR: \quad (r_2 + r_3)^2 = (r_2 - r_3)^2 + (x_P - x_M)^2 \quad \rightarrow \quad 4\,r_2\,r_3 = (x_P - x_M)^2 \tag{2}$$

Mit Hilfe von Gleichung (1) ersetzen wir r_2 :

$$4 \cdot r_3 \cdot \frac{x_M \cdot (x_K - x_P)}{2\,r_3} = (x_P - x_M)^2 \tag{3}$$

$$2 \cdot x_M \cdot (x_K - x_P) = (x_P - x_M)^2 \tag{4}$$

$$2 \cdot x_M \cdot x_K - 2 \cdot x_M \cdot x_P = {x_P}^2 - 2\,x_M\,x_P + {x_M}^2 \tag{5}$$

$$0 = {x_M}^2 - 2 \cdot x_M \cdot x_K + {x_P}^2 \quad \rightarrow \quad x_M = x_K \pm \sqrt{{x_K}^2 - {x_P}^2} \tag{6}$$

Für das rechtwinklige Dreieck ATS gilt der *Satz der Pythagoras*:

$$\triangle ATS: \quad h = \sqrt{{x_K}^2 - {x_P}^2} \tag{7}$$

Die gesuchte Strecke x_M berechnet sich dann aus:

$$x_M = x_K - \sqrt{{x_K}^2 - {x_P}^2} = x_K - h \tag{8}$$

Anmerkung: Auch die zweite Lösung der quadratischen Gleichung (6) liefert einen Berührungskreis der die Seiten AC und AB tangiert. Wenn wir die Seite AB über B hinaus verlängern erhalten wir einen zweiten Schnittpunkt U' zwischen dem Kreisbogen um K und dieser Geraden. Die Senkrechte in U' trifft die verlängerte Winkelhalbierende w_α im Punkt M', dem Kreismittelpunkt von k_2'. Dieser Kreis liegt außerhalb vom Dreieck ABC, was im Sinne der Aufgabenstellung nicht zulässig ist.

Konstruktion von Kreis k_1

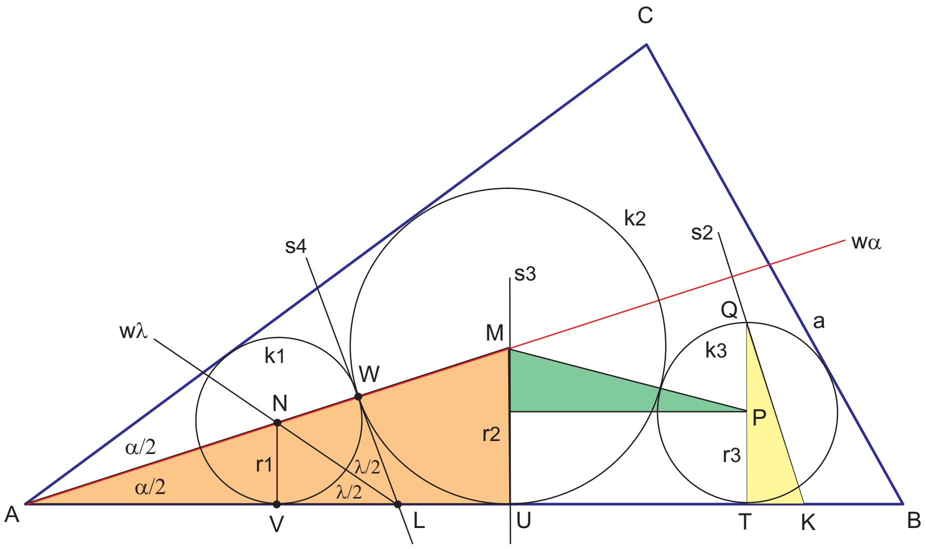

Abbildung 5: Konstruktion von k_1 aus k_2

Nachdem der kompliziertere Teil der Konstruktion gelöst ist, können wir den Kreis k_1 recht einfach ermitteln. Wir setzen die Konstruktion wie folgt fort:

- bezeichne den rechs von M liegenden Schnittpunkt zwischen k_2 und w_α mit W
- errichte in W die Senkrechte s_4 zur Winkelhalbierenden w_α
- bezeichne den Schnittpunkt zwischen s_4 und AB mit L
- konstruiere die Winkelhalbierende w_λ vom Winkel $\lambda = \sphericalangle W, L, A$
- bezeichne den Schnittpunkt zwischen w_λ und w_α mit N
- zeichne um N den Kreis k_1 mit Radius $r_1 = \overline{NW}$

Begründung zur Konstruktion:
Die Tangentenabschnitte von L an den Kreis k_1 sind gleich lang : $\overline{LW} = \overline{LV}$. Deshalb muß der gesuchte Mittelpunkt von k_1 auf der Winkelhalbiernenden w_λ von $\sphericalangle WLA$ liegen. Wie in der Einleitung gezeigt, muß N auch auf der Winkelhalbierenden von w_α liegen, da k_1 die Seiten AB und AC tangieren soll. Der Schnittpunkt von w_λ und w_α ist daher der gesuchte Kreismittepunkt N von k_1.