Die Leiter an der Kiste

aus *www.mathe-spass.de*

14. April 2006

In einer Zimmerecke steht eine quadratische Holzkiste mit der Kantenlänge s. Eine Leiter der Länge c soll den Boden, die Kiste und die Wand berühren. In welcher Höhe a berührt die Leiter die Wand? Finde eine geometrische Konstruktion die das Problem löst!

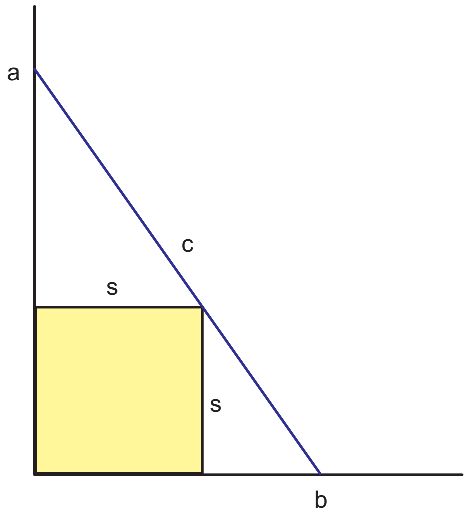

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabenstellung

Lösungsvorschlag

von Jutta Gut, Wien

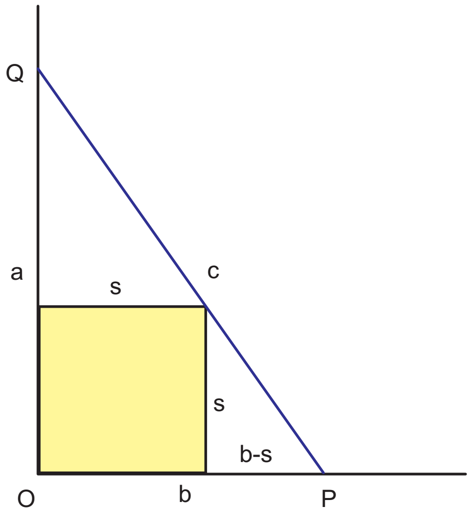

Abbildung 2: Skizze zur Lösung

Seien a und b die Abstände der Leiterenden vom unteren Wandende, c die Länge der Leiter und s die Seitenlänge der Kiste. Dann gilt:

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{1}$$

und

$$\frac{a}{b} = \frac{s}{b-s} \quad \rightarrow \quad a \cdot b = s \cdot (a+b) \tag{2}$$

Daher ist:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b = c^2 + 2 \cdot s \cdot (a+b) \tag{3}$$

Ich setze $a + b = d$:

$$d^2 - 2 \cdot s \cdot d - c^2 = 0 \quad \rightarrow \quad d = s + \sqrt{s^2 + c^2} \tag{4}$$

(die negative Lösung kommt nicht in Frage). Jetzt ist nach (2):

$$a + b = d, \quad a \cdot b = s \cdot d \tag{5}$$

Die Seiten a und b sind daher die Lösungen der quadratischen Gleichung:

$$x^2 - d \cdot x + s \cdot d = 0 \tag{6}$$

In *Mathematika* erhält man als Wurzeln der Gleichung (6):

$$x_1 = a = \frac{1}{2}\left(s + \sqrt{c^2 + s^2} - \sqrt{c^2 - 2s^2 - 2s\sqrt{c^2 + s^2}}\right) \tag{7}$$

$$x_2 = b = \frac{1}{2}\left(s + \sqrt{c^2 + s^2} + \sqrt{c^2 - 2s^2 - 2s\sqrt{c^2 + s^2}}\right) \tag{8}$$

Lösung mit *Zirkel und Lineal*

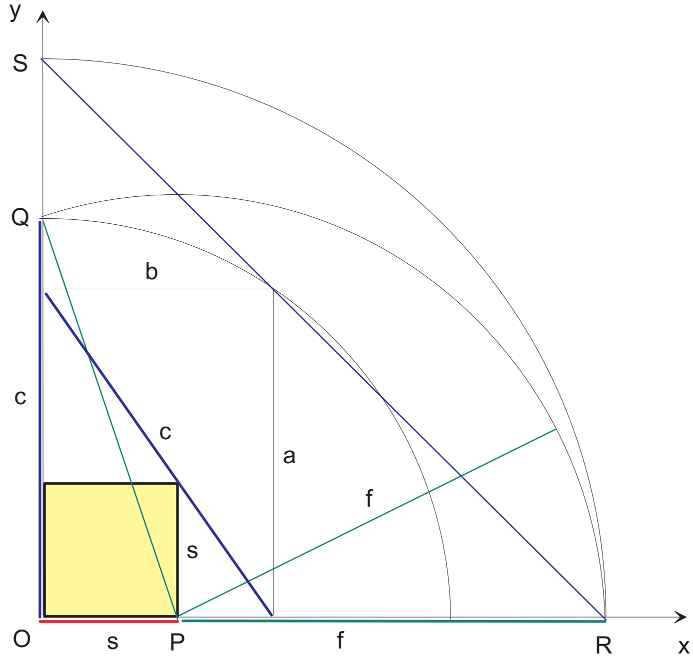

Abbildung 3: die Schnittpunkte der Strecke RS mit dem Kreisbogen (O, c) sind die gesuchten Streckenabschnitte a, b

- Zeichne auf die x-Achse den Punkt $P(s, 0)$ und auf die y-Achse den Punkt $Q(0, c)$,
- zeichne um P einen Kreisbogen mit Radius $f = PQ$, der Schnittpunkt auf der x-Achse sei R
- es gilt jetzt $OR = s + \sqrt{c^2 + s^2} = a + b$
- zeichne um O mit dem Zirkel einen Kreisbogen mit Radius OR, der Schnittpunkt auf der y-Achse sei S
- Zeichne eine Gerade durch R und S
- Zeichne um O einen Kreis mit Radius c
- Die Schnittpunkte mit der Geraden RS haben die Koordinaten (a,b) bzw. (b,a)

Lösung mit einem Computeralgebrasystem

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke in Abbildung 4 folgt:

$$\frac{a}{b} = \frac{s}{b-s}, \qquad \frac{c}{b} = \frac{d}{b-s} \tag{9}$$

Für jede Lage der Leiter gilt der *Satz des Pythagoras*:

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{10}$$

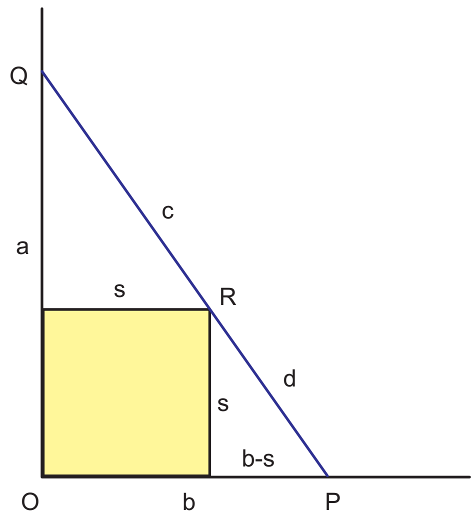

Abbildung 4: Die Dreiecke die von der Wand, der Kiste und der Leiter begrenzt werden, sind einander ähnlich

Die Auflösung der Gleichungen (9), (10) führt in *Mathematica* auf ein Polynom 4.Ordnung :

$$d \to c - \frac{2cs}{s + \sqrt{c^2+s^2} - \sqrt{c^2 - 2s\left(s + \sqrt{c^2+s^2}\right)}}$$

$$a \to s - \frac{2s^2}{s - \sqrt{c^2+s^2} + \sqrt{c^2 - 2s\left(s + \sqrt{c^2+s^2}\right)}}$$

$$b \to \frac{1}{2}\left(s + \sqrt{c^2+s^2} - \sqrt{c^2 - 2s\left(s + \sqrt{c^2+s^2}\right)}\right)$$

$$d \to \frac{c\left(-s+\sqrt{c^2+s^2}+\sqrt{c^2-2s\left(s+\sqrt{c^2+s^2}\right)}\right)}{s+\sqrt{c^2+s^2}+\sqrt{c^2-2s\left(s+\sqrt{c^2+s^2}\right)}}$$

$$a \to s+\frac{2s^2}{-s+\sqrt{c^2+s^2}+\sqrt{c^2-2s\left(s+\sqrt{c^2+s^2}\right)}}$$

$$b \to \frac{1}{2}\left(s+\sqrt{c^2+s^2}+\sqrt{c^2-2s\left(s+\sqrt{c^2+s^2}\right)}\right)$$

$$d \to c+\frac{2cs}{-s+\sqrt{c^2+s^2}+\sqrt{c^2+2s\left(-s+\sqrt{c^2+s^2}\right)}},$$

$$a \to s-\frac{2s^2}{s+\sqrt{c^2+s^2}+\sqrt{c^2+2s\left(-s+\sqrt{c^2+s^2}\right)}}$$

$$b \to \frac{1}{2}\left(s-\sqrt{c^2+s^2}-\sqrt{c^2+2s\left(-s+\sqrt{c^2+s^2}\right)}\right)$$

$$d \to c-\frac{2cs}{s-\sqrt{c^2+s^2}+\sqrt{c^2+2s\left(-s+\sqrt{c^2+s^2}\right)}}$$

$$a \to s-\frac{2s^2}{s+\sqrt{c^2+s^2}-\sqrt{c^2+2s\left(-s+\sqrt{c^2+s^2}\right)}}$$

$$b \to \frac{1}{2}\left(s-\sqrt{c^2+s^2}+\sqrt{c^2+2s\left(-s+\sqrt{c^2+s^2}\right)}\right)$$

Für $s = 1$ und $c = 6$ erhält man Näherungslösungen:

$$\begin{aligned}
a \to 1.20501, \quad b \to 5.87775, \quad d \to 4.9792\\
a \to -5.93864, \quad b \to 0.85588, \quad d \to -1.01033\\
a \to 5.87775, \quad b \to 1.20501, \quad d \to 1.0208\\
a \to 0.85588, \quad b \to -5.93864, \quad d \to 7.01033
\end{aligned}$$