Kreissehnen

von Jutta Gut, Wien

23. Juni 2006

Die folgende Aufgabe ist vielleicht nicht so bekannt, aber auch ziemlich einfach. Sie stammt vom arabischen Mathematiker Al-Biruni (um 1000).

'Wenn in einen beliebigen Kreisbogen eine gerade Linie ungleich gebrochen gelegt wird, und von der Mitte des Bogens eine Senkrechte auf sie gefällt wird, so wird sie dadurch halbiert.'
Mit anderen Worten: Die Punkte A, B und C liegen auf einem Kreis. Wir nehmen an, dass $AB > BC$. D sei der Halbierungspunkt des Bogens AC. Wir fällen von D aus eine Normale auf AB, sie schneidet AB in E. Es ist zu zeigen, dass $AE = (AB + BC)/2$ gilt.

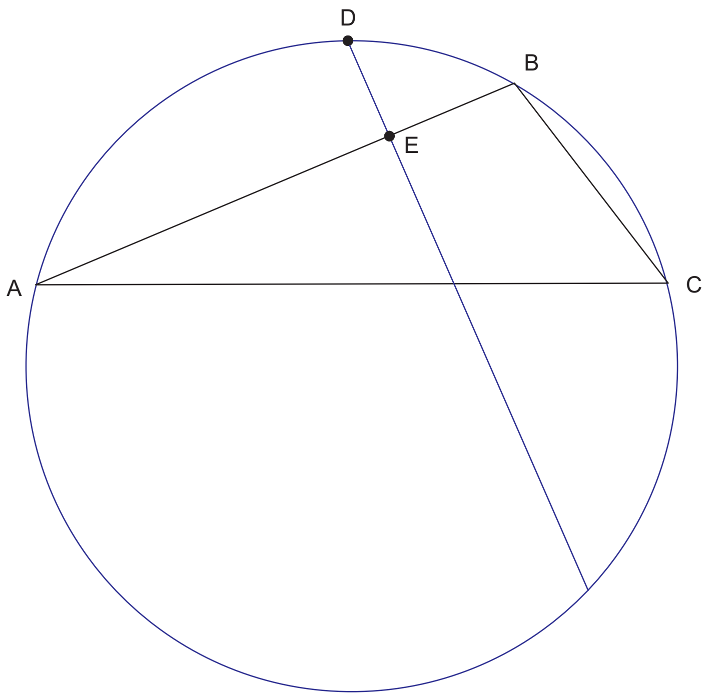

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabenstellung

Lösungsvorschlag I

Wolfgang Kirschenhofer, Österreich

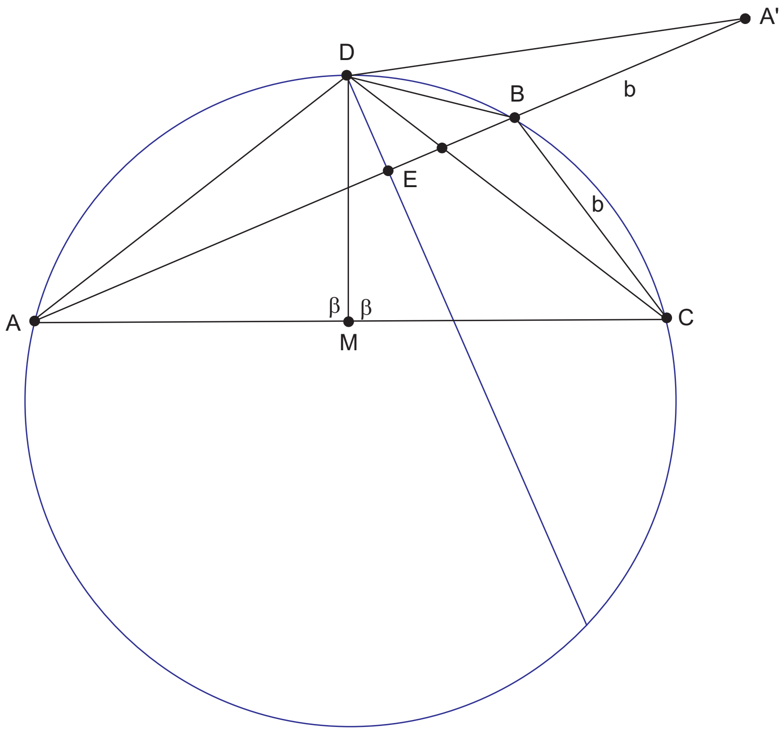

Abbildung 2: Skizze zum Lösungsweg I

Man verlängert die Sehne AB über B hinaus um die Streckenlänge $|BC|$. Den Endpunkt nenne ich A'. Es ist also $|BA'| = |BC|$. Es ist nur zu zeigen, daß E der Mittelpunkt der Strecke AA' ist bzw. es genügt zu zeigen, daß $|DA'| = |DC| = |DA|$ ist. Und dies zeigt man, indem man beweist, daß die Dreiecke DBC und DBA' kongruent sind: Sei $\beta := \sphericalangle AMD = \sphericalangle DMC$. Nach dem Peripheriewinkelsatz(PWS-Satz) ber der Sehne DC gilt.

$$\sphericalangle DBC = 180° - \frac{\beta}{2} \tag{1}$$

Nach dem PWS-Satz ber der Sehne AD :

$$\sphericalangle DBA = \sphericalangle DCA = \frac{\beta}{2} \tag{2}$$

Es folgt:

$$\sphericalangle DBA = \frac{\beta}{2} \quad \rightarrow \quad \sphericalangle DBA' = 180° - \frac{\beta}{2} \tag{3}$$

Die Dreiecke DBC und DBA' stimmen also in den Seitenlängen $|BC| = |BA'|$ und $|BD|$ und in dem von ihnen eingeschlossenen Winkel $180° - \beta/2$ überein und sind daher kongruent. Es ist daher $|DA'| = |DC|$. Weiters ist natürlich $|DC| = |DA|$.

Lösungsvorschlag II

Rainer Rosenthal, Ürdingen

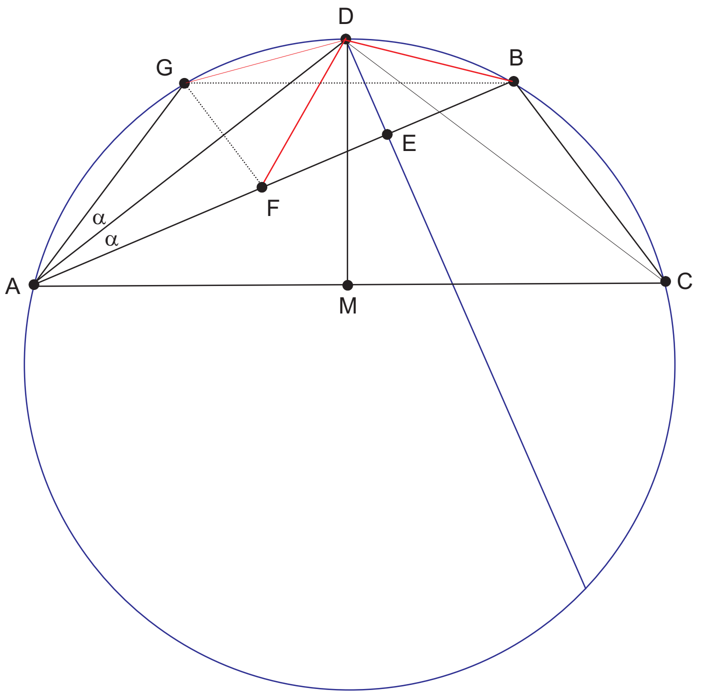

Abbildung 3: Skizze zum Lösungsweg II

Wir zeichnen einen Kreis durch die Punkte A, B und C und benennen den Mittelpunkt mit M. Wenn wir B an der Strecke MD spiegeln, erhalten wir den Kreispunkt G. Die Punkte A und C liegen spiegelbildlich zu MD.
Nach dem SATZ VOM PERIPHERIEWINKEL erscheinen die gleichlangen Sehnen GD und DB vom Punkt A aus unter gleichen Winkeln α. Spiegeln wir G also an AD, so liegt der Spiegelpunkt F auf AB.
Der Punkt E halbiert FB, weil $|DF| = |DB|$ ist und E der Fusspunkt des Lots von D auf AB ist.
Und weil Dreieck AFD kongruent ist zu AGD und also auch zu $\triangle CBD$, ist $|AF| = |BC|$. Jetzt brauchen wir nur noch $|AB|+|BC|$ aus den Stuecken zusammenzusetzen und haben wegen $|EF| = |EB|$ und $|AF| = |BC|$ das gewuenschte Resultat:

$$2 \cdot |AE| = |AE| + |EF| + |AF| = |AE| + |EB| + |BC| = |AB| + |BC| \quad (4)$$

d.h.

$$|AE| = \frac{|AB| + |BC|}{2} \quad (5)$$

Lösungsvorschlag III

Ingmar Rubin, Berlin

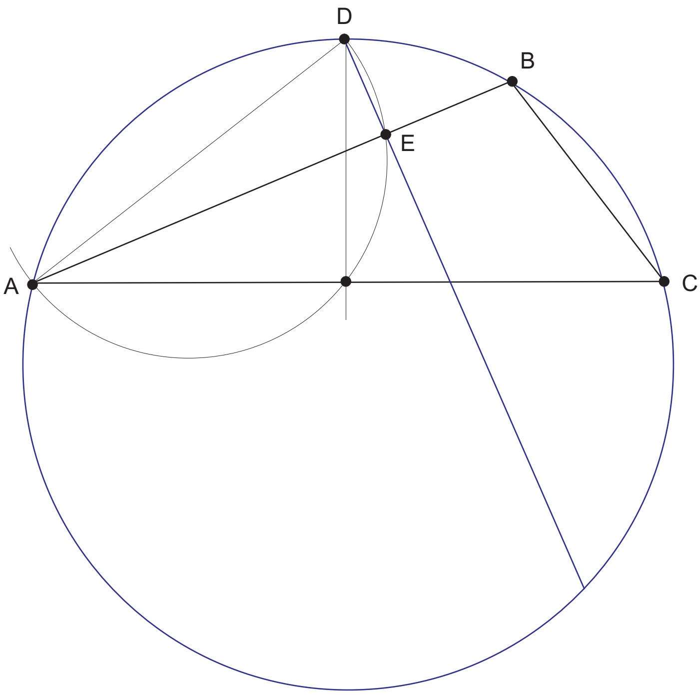

Abbildung 4: Skizze zum Lösungsweg III

Bewegt man den Punkt B entlang der Kreisperipherie beschreibt die Ortskurve vom Schnittpunkt E den Thaleskreis über der Sehne AD. Die Fläche vom Arbelos berechnet sich aus der Differenz der Halbkreisflächen:

$$A = \frac{\pi\, r^2}{2} - \frac{\pi\, a^2}{2} - \frac{\pi\, b^2}{2} \tag{6}$$

Für den Durchmesser $CD = 2\,r$ gilt:

$$2\,r = 2\,a + 2\,b \quad \rightarrow \quad r = a + b \tag{7}$$

Das Ergebnis setzen wir in (1) ein und erhalten:

$$A = \frac{\pi\,(a+b)^2}{2} - \frac{\pi\, a^2}{2} - \frac{\pi\, b^2}{2} = \pi\, a\, b \tag{8}$$

Das Dreieck ADB liegt über dem Durchmesser und ist nach dem Satz Thales rechtwinklig. Für seine Höhe $d = CD$ gilt der *Höhensatz*:

$$d^2 = 4\,a\,b \tag{9}$$