Vermessungskunde

Dr. Friedhelm Götze, Jena

5. Mai 2002

Es seien A, B, C, D Eckpunkte eines trapezförmigen Geländes. Vermessen wurden die parallelen Seiten $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = b$, $a > b$ sowie die spitzen Winkel $\sphericalangle BAD = \alpha = 30°$ und $\sphericalangle ABC = \beta = 60°$.
Zwischen den Punkten X auf der Seite $\overline{AD}$ und Y auf $\overline{BC}$ soll ein Zaun minimaler Länge so gezogen werden, dass die beiden Teilstücke des Trapezes flächengleich sind. Man bestimme die minimale Länge des Zauns ! Punktezahl=8

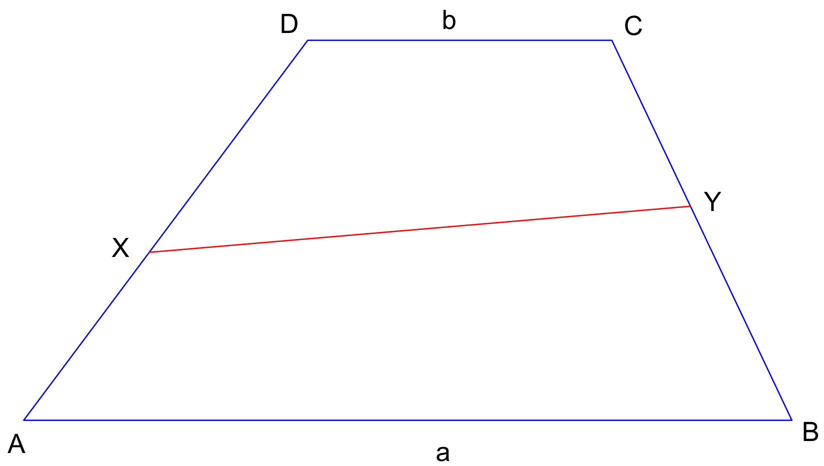

Abbildung 1: Bild zur Aufgabenstellung

Berechnung der Trapezhöhe und des Flächeninhaltes

Wir beginnen unsere Berechnung mit der Höhe h des Trapezes. Von den Punkten D, C werden die Lote auf Seite $\overline{AB}$ gefällt. Die Streckenabschnitte seien mit x_1, x_2 bezeichnet, wie Abbildung 2 zeigt.

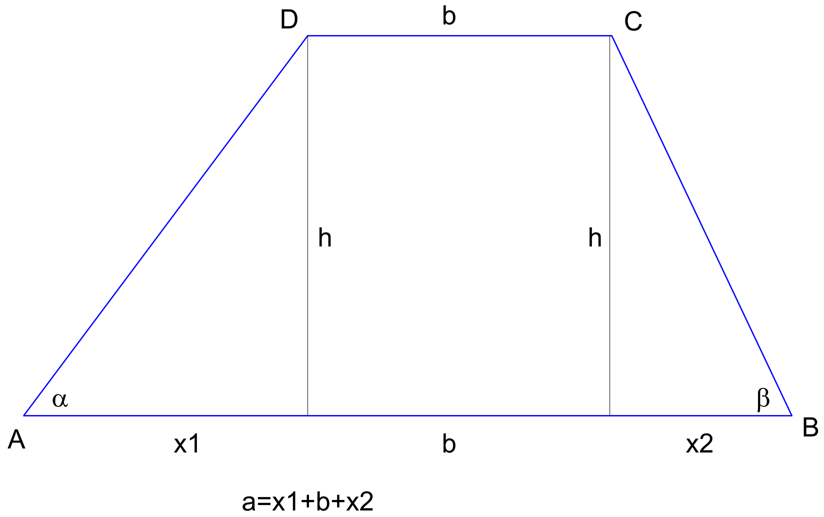

Abbildung 2: Berechnung der Höhe h im Trapez $ABCD$

Mit dem Tangesnsatz im rechtwinkliegen Dreieck gilt dann:

$$\tan\alpha = \frac{h}{x_1}, \quad \tan\beta = \frac{h}{x_2}, \quad a = x_1 + b + x_2 \tag{1}$$

Hieraus können wir h bestimmen :

$$h = \frac{(a-b)\,\tan\alpha\,\tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta} \tag{2}$$

Der Flächeninhalt vom Trapez berechnet sich aus :

$$F = h\,\frac{a+b}{2} = \frac{(a+b)\,(a-b)\,\tan\alpha\,\tan\beta}{2\,(\tan\alpha + \tan\beta)} \tag{3}$$

Berechnung der minimalen Zaunlänge

Für die weitere Betrachtung legen wird den Punkt A in den Koordinatenursprung eines rechtwinklig, kartesischen Koordinatensystems. Die $x-$ Achse falle mit Seite $\overline{AB} = a$ zusammen. Für die Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ definieren wir zwei Geradengleichungen f, g :

$$f(x) = x\,\tan\alpha, \qquad g(x) = (a - x)\,\tan\beta \tag{4}$$

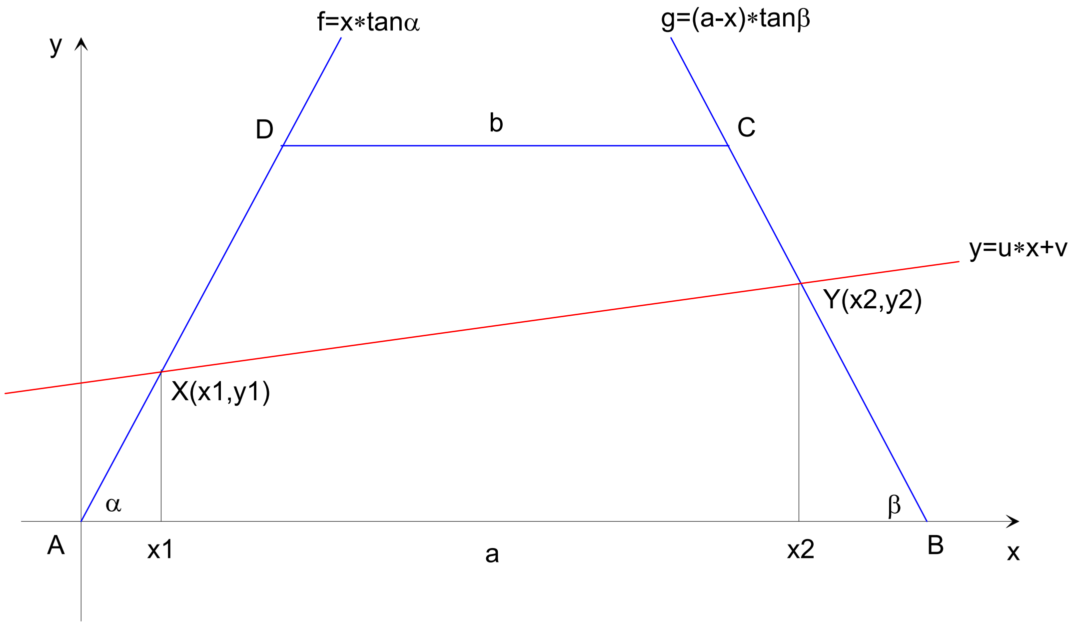

Abbildung 3: Skizze zur Lösung

Der Zaun werde allgemein durch die Geradengleichung (5) definiert.

$$y(x) = u\,x + v \tag{5}$$

Der Schnittpunkt zwischen f und y ist der Punkt X. Seine Koordinaten folgen aus :

$$x_1\,\tan\alpha = u\,x_1 + v \quad \rightarrow \quad x_1 = \frac{v}{\tan\alpha - u}, \quad y_1 = \frac{u\,v}{\tan\alpha - u} + v \tag{6}$$

Analog dazu berechnen wir die Koordinaten vom Schnittpunkt Y zwischen g und y :

$$(a - x_2)\,\tan\beta = u\,x_2 + v \tag{7}$$

$$\rightarrow \quad x_2 = \frac{a\,\tan\beta - v}{\tan\beta + u}, \quad y_2 = \frac{u\,(a\,\tan\beta - v)}{\tan\beta + u} + v \tag{8}$$

Die Fläche zwischen $x-$ Achse und dem Zaun im Intervall $x_1 \leq x \leq x_2$ folgt aus dem bestimmten Integral:

$$A = \int\limits_{x_1}^{x_2} u\,x + v\,dx = \left[\frac{1}{2}\,u\,x^2 + v\,x\right]_{x_1}^{x_2} \tag{9}$$

Die halbe Trapezfläche berechnet sich dann zu :

$$\frac{F}{2} = A + \frac{x_1 \cdot y_1}{2} + \frac{(a - x_2) \cdot y_2}{2} \tag{10}$$

Aus dem Vergleich mit (3) erhalten wir die Gleichung :

$$\frac{F}{2} = A + \frac{x_1 \cdot y_1}{2} + \frac{(a - x_2) \cdot y_2}{2} = \frac{(a + b)\,(a - b)\,\tan\alpha\,\tan\beta}{4\,(\tan\alpha + \tan\beta)} \tag{11}$$

An Stelle der Koordianten x_1, y_1, x_2, y_2 schreiben wir die Ausdrücke mit u, v aus (6) und (8). Anschließend lösen wir die Gleichung nach v auf. Dafür sollte man ein Computeralgebraprogramm zu Hilfe nehmen.

$$v = \frac{\left(2\,a\tan\beta\,(\tan\alpha - u) + \sqrt{2}\,\sqrt{a^2 + b^2}\,\sqrt{\tan\alpha}\,\sqrt{\tan\beta}\,\sqrt{(\tan\alpha - u)\,(\tan\beta + u)}\right)}{2\,(\tan\alpha + \tan\beta)} \tag{12}$$

Die Punktabstandsformel zwischen X und Y liefert die Länge des Zauns. Für die Extremwertbetrachtung können wir bequemer mit dem Abstandsquadrat $L = l^2$ rechnen, da das Minimum hierbei nicht verloren geht.

$$L = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \tag{13}$$

$$L(u, v) = \left(-\frac{v}{\tan\alpha - u} + \frac{-a\tan\beta + v}{-\tan\beta - u}\right)^2 + \left(-\frac{u\,v}{\tan\alpha - u} + \frac{u\,(-a\tan\beta + v)}{-\tan\beta - u}\right)^2 \tag{14}$$

In dieser Gleichung ersetzen wir v durch den Ausdruck aus (12).

$$\begin{aligned}
L(u) = \big((1 + u^2)\,\big(\big(a\tan\beta\,(-\tan\alpha + u) +\big)\\
(\frac{1}{2}\left(2\,a\tan\beta\,(\tan\alpha - u) + \sqrt{2}\,\sqrt{a^2 + b^2}\,\sqrt{\tan\alpha}\,\right)\\
\sqrt{\tan\beta}\,\sqrt{(\tan\alpha - u)\,(\tan\beta + u)}\big)\big)^2\big)/\\
((\tan\alpha - u)^2\,(\tan\beta + u)^2)
\end{aligned}$$

Jetzt bilden wir die erste Ableitung nach u und bestimmen deren Nullstelen :

$$\frac{dL}{du} = \frac{(a^2 + b^2)\tan\alpha\tan\beta\,(\tan\beta + 2\,u - \tan\beta\,u^2 + \tan\alpha\,(-1 + 2\tan\beta\,u + u^2))}{2\,(\tan\alpha - u)^2\,(\tan\beta + u)^2} \tag{15}$$

$$\Big\{\Big\{u_{01} \to \frac{-1 - \tan\alpha\tan\beta - \sqrt{1 + \tan\alpha^2}\,\sqrt{1 + \tan\beta^2}}{\tan\alpha - \tan\beta}\Big\},$$

$$\Big\{u_{02} \to \frac{-1 - \tan\alpha\tan\beta + \sqrt{1 + \tan\alpha^2}\,\sqrt{1 + \tan\beta^2}}{\tan\alpha - \tan\beta}\Big\}\Big\}$$

Die Nullstellen u_{01}, u_{02} existieren nur für den Fall, das $\alpha \neq \beta$ ist. Bei gleich großen Basiwinkel, d.h. einem symmetrischen Trapez, verläuft die kürzeste Strecke $\overline{XY}$ parallel zur Grundseite $\overline{AB}$. Mit Hilfe der zweiten Ableitung überprüfen wir die Lösungen u_{01}, u_{02} auf Maximum bzw. Minimum .

$$\begin{aligned} L''(u) = ((a^2+b^2)\tan\alpha\tan\beta \\ (\tan\beta^2 + \tan\alpha^2\,(1+\tan\beta^2) + 3\,u^2 - \tan\beta\,u\,(-3+u^2) + \\ \tan\alpha\,(-\tan\beta - 3\,u + 3\tan\beta\,u^2 + u^3)))/ \\ ((\tan\alpha - u)^3\,(\tan\beta + u)^3) \end{aligned}$$

Die Lösung $u = u_{01}$ ergibt einen negativen Wert für die zweite Ableitung :

$$L''(u_{01}) = \frac{\left(\frac{64}{3} - \frac{112}{3\sqrt{3}}\right)(a^2+b^2)}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\right)^4} < 0 \quad \rightarrow \quad Maximum \tag{16}$$

Die Lösung $u = u_{02}$ ergibt einen positiven Wert für die zweite Ableitung :

$$L''(u_{02}) = \frac{\left(\frac{64}{3} + \frac{112}{3\sqrt{3}}\right)(a^2+b^2)}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\right)^4} > 0 \quad \rightarrow \quad Minimum \tag{17}$$

Mit $u = u_{02}$ erhalten wir das minimale l zu

$$l = \frac{\sqrt{(a^2+b^2)\tan\alpha\tan\beta\left(1 - \tan\alpha\,\tan\beta + \sqrt{1+\tan\alpha^2}\,\sqrt{1+\tan\beta^2}\right)}}{\tan\alpha + \tan\beta} \tag{18}$$

Mit den numerischen Werten aus der Aufgabenstellung ist:

$$l_{min} = \frac{\sqrt[4]{3}}{2}\,\sqrt{a^2+b^2} \tag{19}$$

Die Geradengleichung für $y = u\,x + v$ genügt in der Minimallage der Gleichung :

$$y_{min} = (\sqrt{3} - 2)\,x + \frac{1}{2}\,\left(\left(3 - \sqrt{3}\right)\,a + \sqrt{-3 + 2\sqrt{3}}\,\sqrt{a^2+b^2}\right) \tag{20}$$