Zwei Kreise im Quadrat

Eine Extremwertaufgabe von Peter G. Nischke, Berlin

5. Oktober 2003

Gegeben sei das Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a. Auf der Seite $\overline{AB}$ befinde sich der Punkt P. Dem Quadrat werden zwei Kreise k_1, k_2 mit den Radien u, v so einbeschrieben, dass sie je zwei Seiten des Quadrates berühren und die Strecke $\overline{DP}$ als gemeinsame Tangente besitzen.

1. Bestimme die Radien u, v in Abhängigkeit von a und $s = \overline{EP}$.
2. Variiere P so, dass die Summe der Radien einen Extremwert einnehmen!
3. Untersuche das Produkt $u \cdot v$ auf Extrema bei Variation von P auf $\overline{AB}$!
4. Besitzt die Summe der Kreislächeninhalte einen Extremwert?

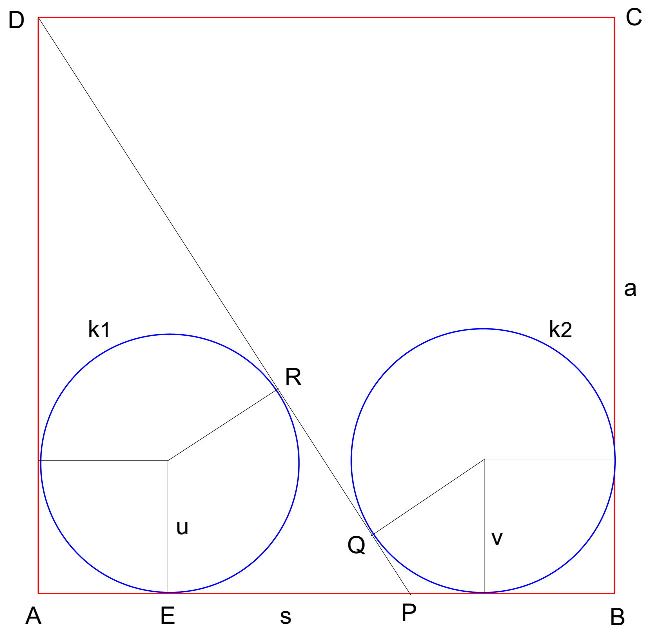

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabenstellung

Punktezahl=9

Berechnung der Radien in Abhängigkeit von $\overline{EP}$

Wir bezeichnen die Strecken und Punkte entsprechend Abbildung 2.

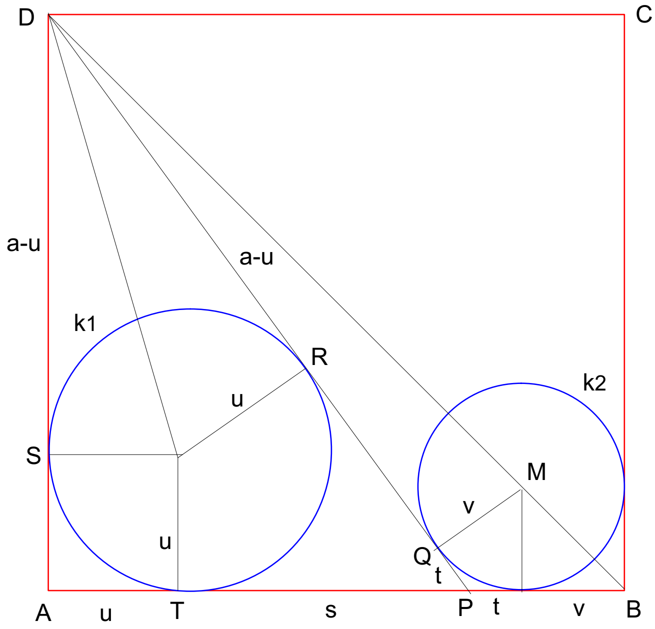

Abbildung 2: Skizze zur Lösung

Die Strecken s, t bezeichnen die gemeinsamen Tangentenabschnitte an die Kreise k_1, k_2 vom Punkt P aus. Für Seite $\overline{AB}$ gilt dann :

$$\overline{AB}: \qquad a = u + s + t + v \tag{1}$$

Das Dreieck PAD ist rechtwinklig und es gilt der *Satz des Pythagoras* :

$$\triangle PAD: \qquad a^2 + (u+s)^2 = (a-u+s)^2 \quad \to \quad a\,s = u\,(a+2\,s) \tag{2}$$

Das zweite Mal benutzen wir den Satz des Pythagoras im Dreick DQM :

$$\triangle DQM: \qquad \overline{DM}^2 = \overline{MQ}^2 + \overline{DQ}^2 \tag{3}$$

$$\triangle DQM: \qquad \left(a\sqrt{2} - v\sqrt{2}\right)^2 = v^2 + (a-u+s-t)^2 \tag{4}$$

Diese Gleichung läßt sich vereinfachen durch Anwendung von (1) :

$$\left(a\sqrt{2} - v\sqrt{2}\right)^2 = v^2 + (2\,s+v)^2 \quad \to \quad a\,v + s\,(v+s) = a^2 \tag{5}$$

Die Gleichungen (1), (2) und (5) lösen wir mit einem Computeralgebrasystem nach u, v, t auf.

$$u = \frac{a\,s}{a+2\,s}, \quad v = \frac{a^2 - 2\,s^2}{2\,(a+s)}, \quad t = -\frac{-a^3 + 2\,a\,s^2}{2\,(a+s)\,(a+2\,s)} \tag{6}$$

Untersuchung der Summe auf Extrema

Für die Summe der Radien in Abhängigkeit von a, s erhält man:

$$su = u + v = \frac{a\,s}{a + 2\,s} + \frac{a^2 - 2\,s^2}{2\,(a + s)} \tag{7}$$

Bevor wir die erste Ableitung bilden, und deren Nullstellen bestimmen, schauen wir uns den Graphen der Funktion $su(a, s)$ für $a = 10$ auf dem Intervall $0 < s < 7$ an :

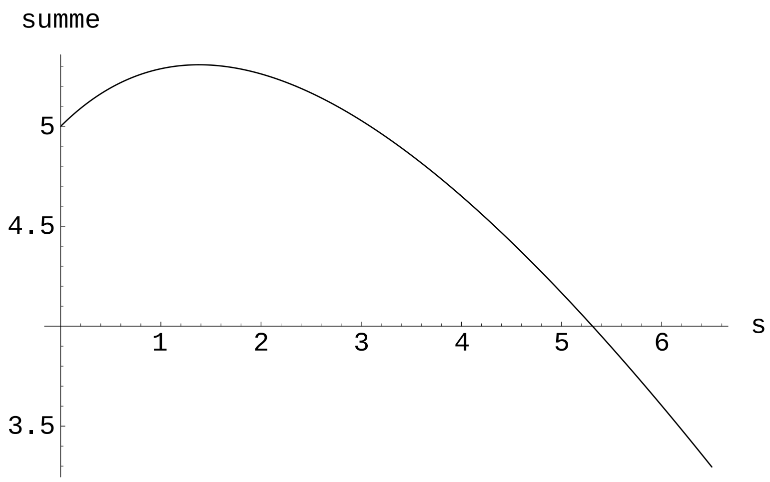

Abbildung 3: Graph der der Funktion $su = u + v$ für $a = 10$

Offensichtlich gibt es ein Maximum im Bereich $1.0 < s < 2.0$. Die erste Ableitung lautet:

$$\frac{dsu}{ds} = -1 + a^2 \left(\frac{1}{2\,(a + s)^2} + \frac{1}{(a + 2\,s)^2} \right) \tag{8}$$

Das ist ein Polynom 4.Ordnung, entsprechend kompliziert sehen die Nullstellen aus. Für die Lösung der Aufgabe genügt eine numerische Lösung:

$$s_1 = -17.6931, \quad s_{2/3} = -6.84398 \pm 2.07756\,i, \quad s_4 = 1.38104$$

Aus Abbildung 3 entnehmen wir, das das Maximum der Summe bei $s_4 = 1.38104$ erreicht wird. Die Radien u und v betragen dann :

$$s_4 = 1.38104 \quad \rightarrow \quad u(s_4) = 1.08215, \quad v(s_4) = 4.22569, \quad u + v = 5.30783$$

Im Vergleich dazu beträgt die Summe bei Gleichheit der Radien :

$$u = v = 2.28155 \quad \rightarrow \quad u + v = 4.5631$$

Untersuchung des Produktes auf Extremstellen

Für das Produkt der Radien in Abhängigkeit von a, s erhalten wir :

$$p(a,s) = \frac{a\,s\,(a^2 - 2\,s^2)}{2\,(a+s)\,(a+2\,s)} \tag{9}$$

Analog wie bei der Summenfunktion betrachten wir den Graphen der Funktion $p(a,s)$ für $a = 10$ auf dem Intervall $0 < s < 7$:

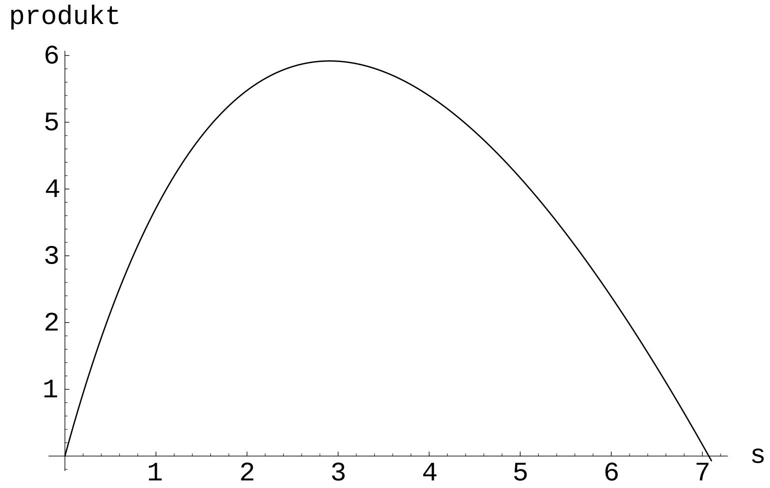

Abbildung 4: Graph der der Funktion $p = u \cdot v$ für $a = 10$

Man erkennt ein Maximum im Bereich $s \approx 3.0$. Die erste Ableitung lautet :

$$p' = \frac{a}{2}\left(-1 + a^2\left(\frac{1}{(a+s)^2} + \frac{1}{(a+2\,s)^2}\right)\right) \tag{10}$$

Die Nullstellen von p' sind umfangreiche, algebraische Ausdrücke mit ineinander geschachtelten Wurzeln. Als numerische Näherung erhält man :

$$s_1 = -20.56, \quad s_{2/3} = -6.17384 \pm 1.92394\,i, \quad s_4 = 2.90773$$

Das Maximum des Produkts $u \cdot v$ liegt bei $s_4 = 2.90773$. Die Radien u und v betragen dann :

$$s_4 = 2.90773 \quad \rightarrow \quad u(s_4) = 1.83854, \quad v(s_4) = 3.21862, \quad u \cdot v = 5.91755$$

Im Vergleich dazu beträgt das Produkt bei Gleichheit der Radien :

$$u = v = 2.28155 \quad \rightarrow \quad u \cdot v = 5.20547$$

Kreisflächeninhalt

Die Summe der beiden Kreisflächen berechnet sich aus :

$$A(s) = \pi \, (u^2 + v^2) = \pi \left(\frac{a^2 \, s^2}{(a + 2\,s)^2} + \frac{(a^2 - 2\,s^2)^2}{4\,(a+s)^2} \right) \tag{11}$$

Wir bilden die erste Ableitung nach s :

$$A'(s) = \pi \left(- \frac{a^4 - 4\,s^3\,(2\,a + s) + \frac{4\,a^3\,s^2\,(3\,a^2 + 9\,a\,s + 7\,s^2)}{(a + 2\,s)^3}}{2\,(a+s)^3} \right) \tag{12}$$

Eine algebraische Bestimmung der Nullstellen scheitert, da das Zählerpolynom der ersten Ableitung vom Grad 7 ist. Abermals nähern wir uns der Lösung über eine Graphik :

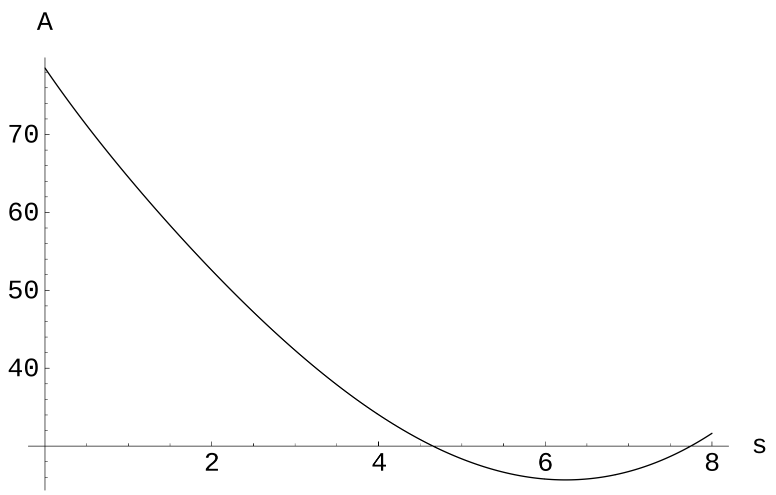

Abbildung 5: Summe der Kreisflächen in Abhängigkeit von s für $a = 10$

Wir erkennen in der Nähe von $s = 6.0$ ein Minimum. Als numerische Lösung erhält man :

$$s_{min} = 6.24474, \qquad u = 2.77674, \qquad v = 0.677342 \tag{13}$$