Das Rätsel von den drei Ostereiern

Ingmar Rubin, Berlin

25. März 2001

Die letzte Mathematikstunde vor den lang ersehnten Osterferien ist angebrochen. Damit die Ferien nicht all zu *langweilig* werden, hat sich Mathematiklehrer *Karl Ostermann* für seine Gymnasiasten wieder eine knifflige Aufgabe ausgedacht. Gegen Ende der Unterrichtstunde geht *Ostermann* an seine Tasche und holt österliches Naschwerk hervor. Was wird sich der alte Kauz wohl diesmal ausgedacht haben ? Er legt drei unterschiedlich große Schokoladenostereier in einer Linie auf den Lehrertisch.

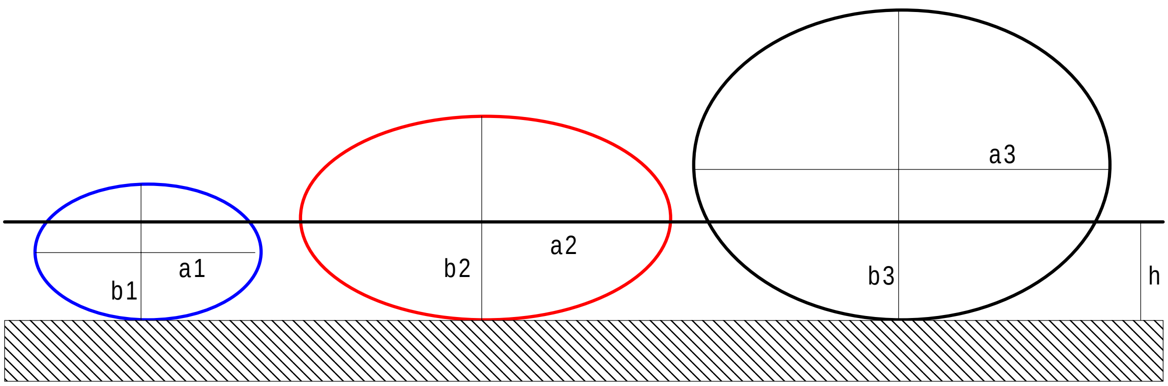

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabenstellung

Lehrer Karl erklärt, das die Eier in ihren geometrischen Abmessungen mit einem Rotionsellipsoid gleichzusetzen sind. Die Eier haben die Abmaße:

- Ei Nr. 1 Große Halbachse $a_1 = 20mm$, kleine Halbachsen $b_1 = c_1 = 10mm$,
- Ei Nr. 2 Große Halbachse $a_2 = 30mm$, kleine Halbachsen $b_2 = c_2 = 20mm$,
- Ei Nr. 3 Große Halbachse $a_3 = 40mm$, kleine Halbachsen $b_3 = c_3 = 30mm$,

Eine zur Tischfläche parallele Ebene, schneidet die drei Eier in Ellipsenflächen. Lehrer Karl's Aufgabe lautet nun :

Man bestimme die Höhe der Schnittebene in Bezug auf den Tisch so, dass die Summe der drei Ellipsenflächen maximal wird ! Als kleine Hilfestellung gibt er seine Schülern noch auf den Weg, die Aufgabe zunächst mit drei unterschiedlich großen Kugeln zu lösen.

Punktezahl=8

Lösung mit drei Kugeln

Wir zeichen uns in jeden der Kreise das Hilfsdreieck ABC ein. Das Dreieck liegt über dem Durchmesser und ist damit rechtwinklig (*Satz des Thales*). Der Abstand zwischen Tischplatte und Schnittebene betrage h. Die Radien, welche sich in der Schnittebene ergeben seien mit r_1, r_2, r_3 bezeichnet.

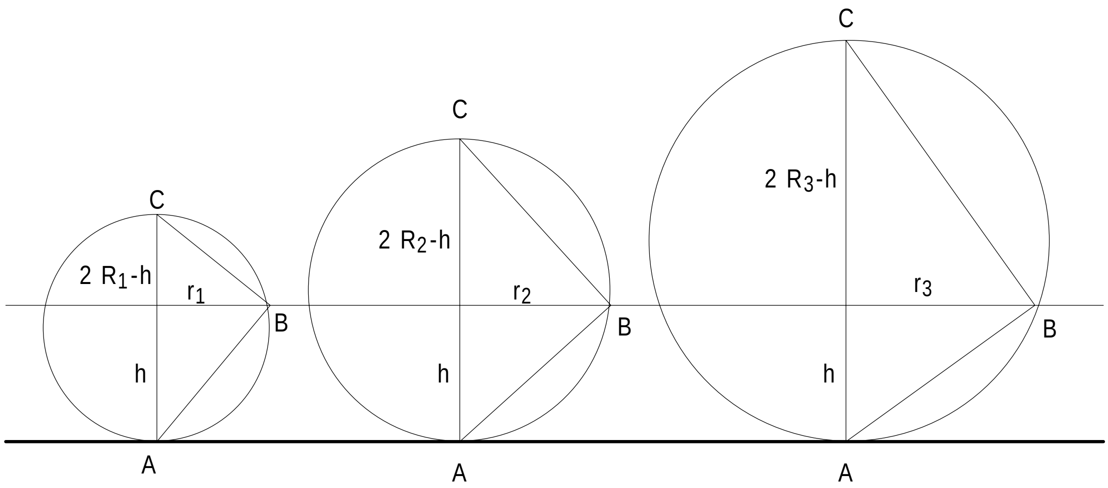

Abbildung 2: Skizze zur Lösung

Aus dem Höhensatz im rechtwinkliegen Dreieck ABC folgt :

$$r_i^2 = h \cdot (2 \cdot R_i - h), \quad i = 1 \dots 3 \tag{1}$$

Die Summe der Schnittflächen, in Abhängigkeit von h beträgt:

$$A(h) = \pi \cdot \sum_{i=1}^{3} h \cdot (2 \cdot R_i - h) = \pi \cdot h \cdot (2R_1 + 2R_2 + 2R_3) - \pi \cdot 3 \cdot h^2 \tag{2}$$

Um das Maximum zu berechnen, bilden wir die erste Ableitung und bestimmen die Nullstelle.

$$A'(h) = \pi \cdot (2R_1 + 2R_2 + 2R_3) - \pi \cdot 6 \cdot h \tag{3}$$

$$A'(h) = 0 \quad \rightarrow \quad h_0 = \frac{R_1}{3} + \frac{R_2}{3} + \frac{R_3}{3} \tag{4}$$

Mit Hilfe der zweiten Ableitung überprüfen wir das Ergebnis auf Maximum.

$$A''(h) = -6 \cdot \pi \tag{5}$$

Die zweite Ableitung ist stets negativ, weshalb an der Stelle $h = h_0$ ein lokales Maximum vorliegt.

Lösung mit drei Ellipsoiden

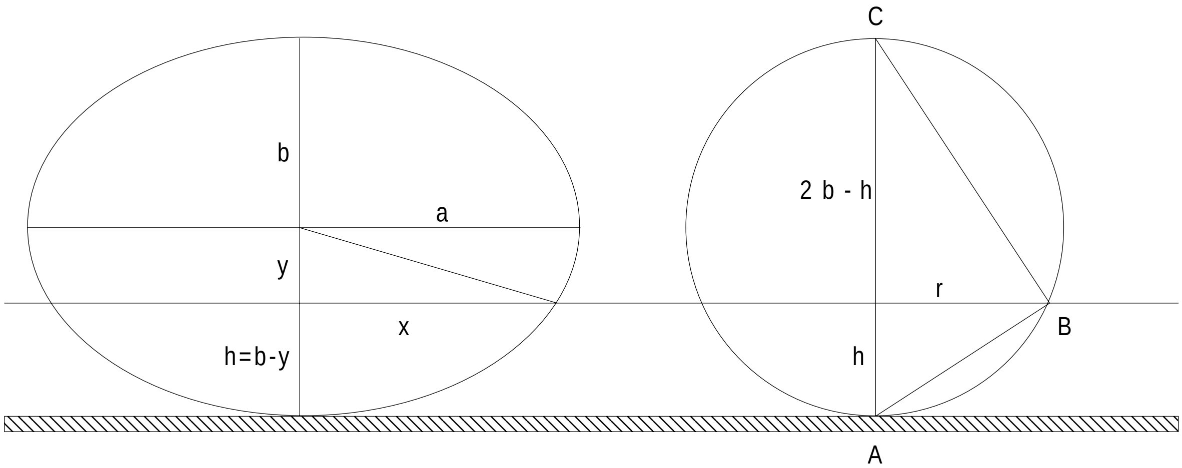

Abbildung 3: Skizze zur Lösung

Wir berechnen die Schnittfläche zunächst für eines der Eier und verallgemeinern den Lösungsansatz dann. Schauen wir auf die $x - y$ Schnittebene sehen wir eine Ellipse mit den Halbachsen a, b vor uns. Die allgemeine Ellipsengleichung in Mittelpunktslage lautet :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{6}$$

Die $x-$ Koordinate bezeichnet dabei die große Halbachse innerhalb der ellipsenförmigen Schnittfläche. Da wir x in Abhängikeit von h benötigen, ersetzen wir:

$$y = b - h \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{b^2} \cdot (b - h)^2} \tag{7}$$

In der $z - y$ Ebene ergibt sich ein Kreis, mit dem Radius der kleinen Halbachse b. Über dem Durchmesser $2b$ errichten wir das rechtwinklige Hilfsdreieck ABC (*Satz des Thales*). Die Höhe r im $\triangle ABC$ folgt aus dem Höhensatz:

$$r = \sqrt{h \cdot (2\,b - h)} \tag{8}$$

Die ellipsenförmige Schnittfläche mit den Halbachen x, r besitzt den Flächeninhalt:

$$A = \pi \cdot x \cdot r = \pi \cdot \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{b^2} \cdot (b - h)^2} \cdot \sqrt{h \cdot (2\,b - h)} \tag{9}$$

Nach Zusammenfassen der beiden Wurzeln ergibt sich:

$$A = \pi \cdot \sqrt{\frac{a^2\,h^2\,(2\,b - h)^2}{b^2}} = \frac{\pi\,a\,h\,(2\,b - h)}{b} \tag{10}$$

An Stelle von a, b setzen wir nun die indizierten Größen a_i, b_i der drei Eier. Die Summe aller Schnittflächen in Abhängigkeit von h beträgt:

$$A(h) = \pi \cdot \sum_{i=1}^{3} \frac{a_i\, h\, (2\, b_i - h)}{b_i} \tag{11}$$

$$A(h) = \pi \cdot h \cdot \left(\frac{a_1\,(2b_1 - h)}{b_1} + \frac{a_2\,(2b_2 - h)}{b_2} + \frac{a_3\,(2b_3 - h)}{b_3} \right) \tag{12}$$

Als erste Ableitung $A'(h)$ erhalten wir:

$$A'(h) = 2 \cdot \pi \cdot \left(a_1 + a_2 + a_3 - \frac{a_1 h}{b_1} - \frac{a_2 h}{b_2} - \frac{a_3 h}{b_3} \right) \tag{13}$$

Die Nullstelle der ersten Ableitung liegt bei:

$$A'(h) = 0 \quad \rightarrow \quad h_0 = \frac{(a_1 + a_2 + a_3) b_1 b_2 b_3}{a_3 b_1 b_2 + a_2 b_1 b_3 + a_1 b_2 b_3} \tag{14}$$

Die zweite Ableitung ist stets negativ, weshalb an der Stelle $h = h_0$ ein lokales Maximum vorliegt.

$$A''(h) = -2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} \right) \tag{15}$$

Für die Abmaße von Lehrer Karl's Ostereiern erhalten wir als optimale Höhe

$$h_{opt} = \frac{(a_1 + a_2 + a_3) b_1 b_2 b_3}{a_3 b_1 b_2 + a_2 b_1 b_3 + a_1 b_2 b_3} = \frac{540}{29} = 18.6207\, mm \tag{16}$$

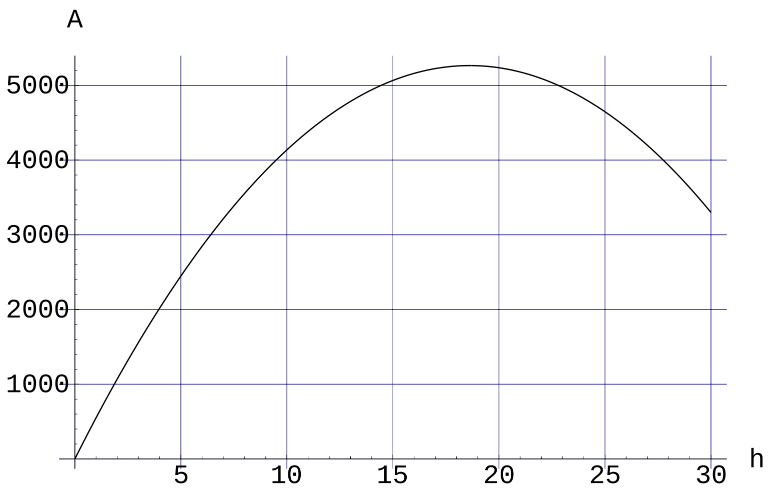

Abbildung 4: Summe der Ellipsenflächen in Abhängigkeit von h