Die Eiskugel im Eisbecher

MathSoft Puzzel

3. August 2000

Ein kegelförmiger Eisbecher besitze eine Höhe von $h = 20\,cm$ und einen halben Öffnungswinkel von $\alpha = 15°$. Der Becher ist randvoll mit Wasser gefüllt. In den Becher wird eine Eiskugel vom Radius R gegeben. Wie groß muß die Kugel sein, damit möglichst viel Wasser aus dem Eisbecher verdrängt wird.

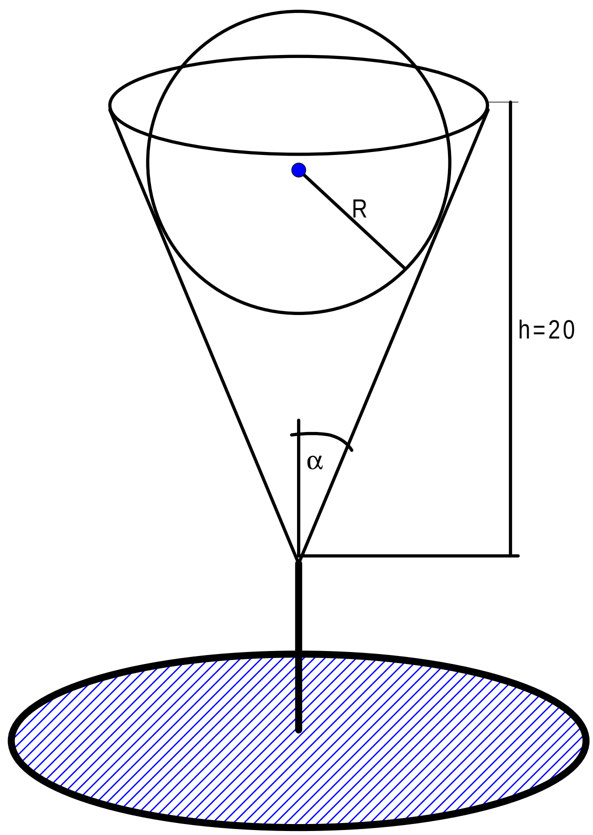

Abbildung 1: Bild zur Aufgabenstellung

Lösung

In der folgenden Ableitung wird das Volumen der Kugelhälfte bestimmt, welche sich im Becher befindet. Der Becher wird dazu um 90° gedreht. Die Kegelspitze liegt im Koordinatenursprung. Der Mittelpunkt der Kugel befinde sich bei $M(x_m, 0)$.

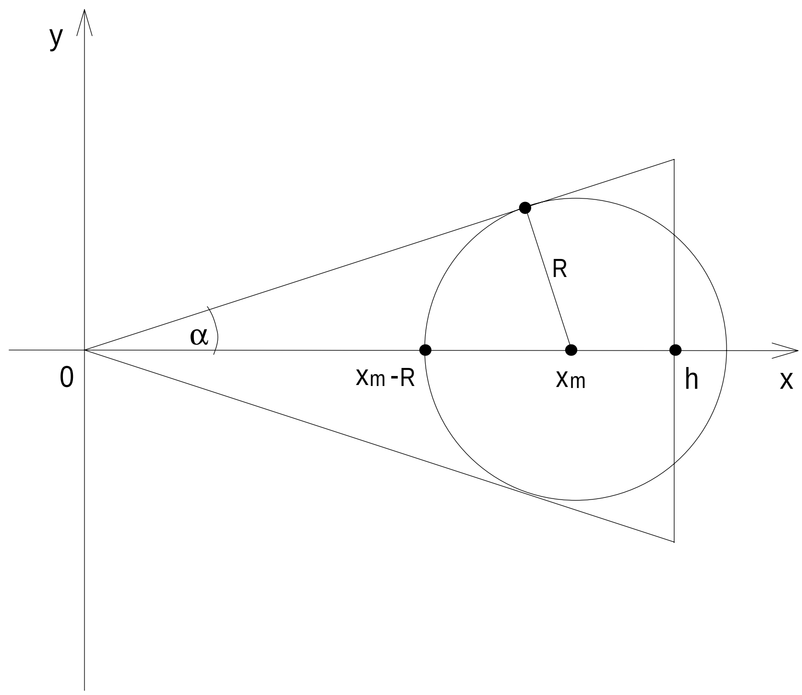

Abbildung 2: Skizze zur Lösung

Die Kreisgleichung, welche den Kugelquerschnitt beschreibt, lautet dann:

$$(x - x_m)^2 + y^2 = R^2 \quad \rightarrow \quad y = \sqrt{R^2 - (x - x_m)^2} \tag{1}$$

Der Radius steht mit dem Öffnungswinkel des Kegels in der Beziehung:

$$R = x_m \cdot \sin(\alpha) \tag{2}$$

Das Volumen der Teilkugel folgt aus:

$$V = \pi \int\limits_{x=x_m-R}^{x=h} y^2 \cdot dx = \pi \int\limits_{x=x_m-R}^{x=h} [R^2 - (x - x_m)^2] \cdot dx \tag{3}$$

Die bestimmte Integration über x liefert:

$$V = \pi \cdot \left(-\frac{h^3}{3} + h \cdot R^2 + \frac{2 \cdot R^3}{3} + h^2 \cdot x_m - R^2 \cdot x_m - h \cdot {x_m}^2 + \frac{{x_m}^3}{3} \right) \tag{4}$$

Der Radius R wird durch Gleichung (2) ersetzt:

$$V(x_m) = -\frac{\pi}{3} \cdot (h - x_m - 2 \cdot x_m \sin[\alpha]) \cdot (h - x_m + x_m \cdot \sin[\alpha])^2 \tag{5}$$

Das Volumen ist jetzt eine kubische Funktion, welche nur von der Variablen x_m abhängig ist. Für $h = 20\,cm$ und $\alpha = 15°$ erhält man die folgende Graphik:

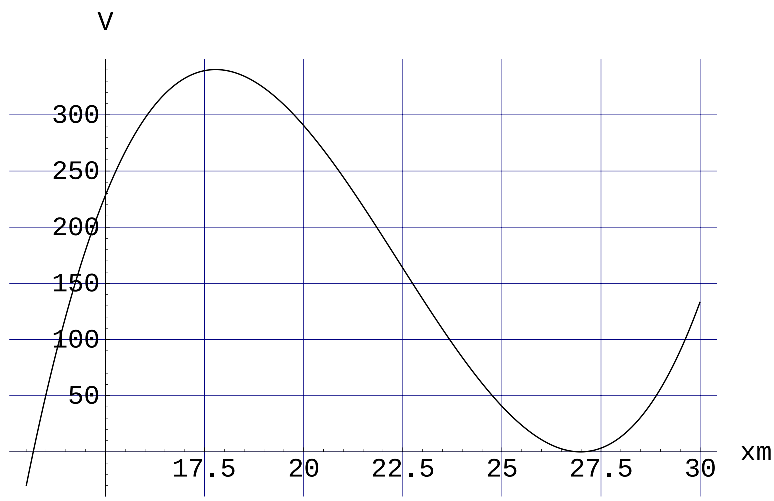

Abbildung 3: Volumen der Teilkugel in Abhängigkeit von x_m

Aus der ersten Ableitung werden nun die Extremstellen bestimmt:

$$V' = \pi \cdot (h - x_m + x_m \sin[\alpha]) \cdot (h - x_m(\cos[2\alpha] + \sin[\alpha])) \tag{6}$$

Die beiden Nullstellen der quadratischen Gleichung liegen bei:

$$x_{m1} = \frac{h}{1 - \sin[\alpha]}, \qquad x_{m2} = \frac{h}{\cos[2\alpha] + \sin[\alpha]} \tag{7}$$

Über die zweite Ableitung muß nun die Art des Extremas (Maximum / Minimum) nachgewisen werden.

$$V'' = 2 \cdot \pi \cdot (-1 + \sin[\alpha]) \cdot (h \cdot (1 + \sin[\alpha]) - x_m \cdot (\cos[2\alpha] + \sin[\alpha])) \tag{8}$$

Das Einsetzen der zweiten Lösung $x_m = x_{m2}$ liefert:

$$V''(x_{m2}) = -h \cdot \pi \cdot (-1 + \cos[2\alpha] + 2 \cdot \sin[\alpha]) \tag{9}$$

Das Bild dieser Funktion zeigt für alle Winkel aus dem Intervall $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ negative Werte.

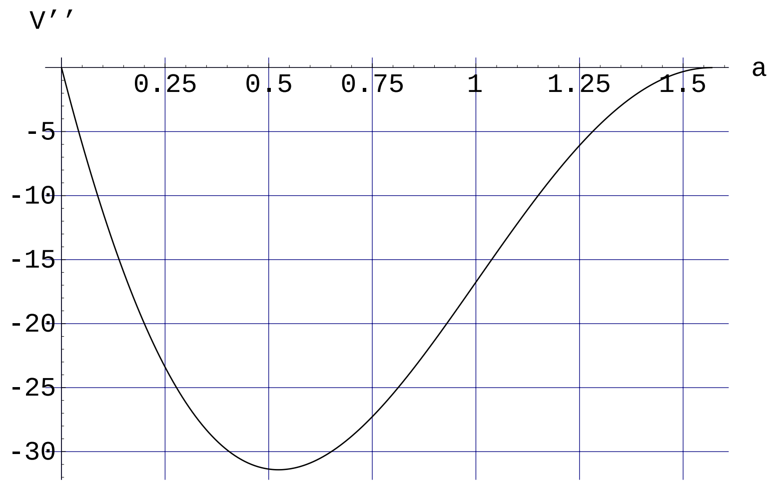

Abbildung 4: Funktion der zweiten Ableitung im Intervall $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

Damit befindet sich an der Stelle $x_m = x_{m2}$ das gesuchte Maximum.

$$x_{m2} = \frac{h}{\cos[2\alpha] + \sin[\alpha]} \tag{10}$$

Als Radius erhält man:

$$R_{max} = x_{m2} \cdot \sin[\alpha] = \frac{h \cdot sin[\alpha]}{\cos[2\alpha] + \sin[\alpha]} \tag{11}$$

Mit den numerischen Werten aus der Aufgabenstellung ergeben sich :

$$R_{max} = \frac{20\sqrt{2}(-1+\sqrt{3})}{-\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}} = 4.60186\, cm \tag{12}$$

Der Mittelpunkt der Kugel befindet sich in der Entfernung x_{m2} über der Kegelspitze:

$$x_{m2} = \frac{h}{\cos[2\alpha] + \sin[\alpha]} = \frac{80}{-\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}} = 17.7802\, cm \tag{13}$$

Das maximale Volumen, das die Kugel mit dem Radius $R = 4.6\, cm$ verdräng, beträgt:

$$V_{max} = -\frac{1}{3}\left(20 - \frac{20}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}} - \frac{10\sqrt{2}\left(-1+\sqrt{3}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}\right)$$

$$\left(20 - \frac{20}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}} + \frac{5\sqrt{2}\left(-1+\sqrt{3}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}\right)^2 \pi$$

Nach Vereinfachung ergibt sich

$$V_{max} = -\frac{32000(-52-37\sqrt{2}+30\sqrt{3}+21\sqrt{6})\pi}{3(-\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6})^3} = 340.335\, cm^3$$

Eisbecher mit variablen Öffnungswinkel α

In diesem Abschnitt soll das Verhalten der optimalen Eiskugel bei veränderlichen Öffnungswinkel α untersucht werden. Die Höhe des Bechers betrage konstant $h = 20\,cm$.

Volumen der im Becher verbleibenden Wassermenge

Volumen des Kegels :

$$V_{kegel} = \pi \int_{x=0}^{x=h} (x \cdot \tan[\alpha]^2) \cdot dx = \frac{\pi}{3} \cdot \tan[\alpha]^2 \cdot h^3 \tag{14}$$

Volumen der optimalen Teilkugel in Abhängigkeit von α:

$$V_{opt} = \frac{4 \cdot h^3 \cdot \pi \cdot \sin[\alpha]^3}{3 \cdot (1 + \sin[3 \cdot \alpha])} \tag{15}$$

Volumen V_{diff} der im Becher verbleibenden Wassermenge:

$$V_{diff} = V_{kegel} - V_{opt} = \frac{\pi \cdot h^3}{3} \cdot \left(\tan[\alpha]^2 - \frac{4 \cdot \sin[\alpha]^3}{(1 + \sin[3 \cdot \alpha])} \right) \tag{16}$$

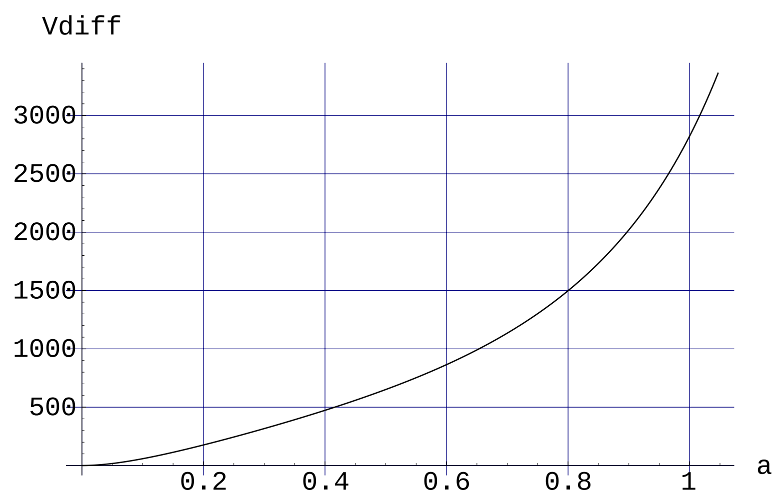

Abbildung 5: Volumendifferenz der im Eisbecher verbleibenden Wassermenge

Mit größer werdenden Öffnungswinkel α nimmt die im Becher verbleibende Wassermenge stetig zu.

Lage des Kugelmittelpunktes bezüglich der Höhe h

Der Abstand Kugelmittelpunkt x_m zur Höhe h verändert sich bei variablen Winkel α. Wird die Differenz gleich Null, so befindet sich der Kugelmittelpunkt genau auf der Höhe h, d.h. die Kugel befindet sich genau zur Hälfte im Becher.

$$f = h - x_m = h - \frac{h}{\cos[2\alpha] + \sin[\alpha]} \tag{17}$$

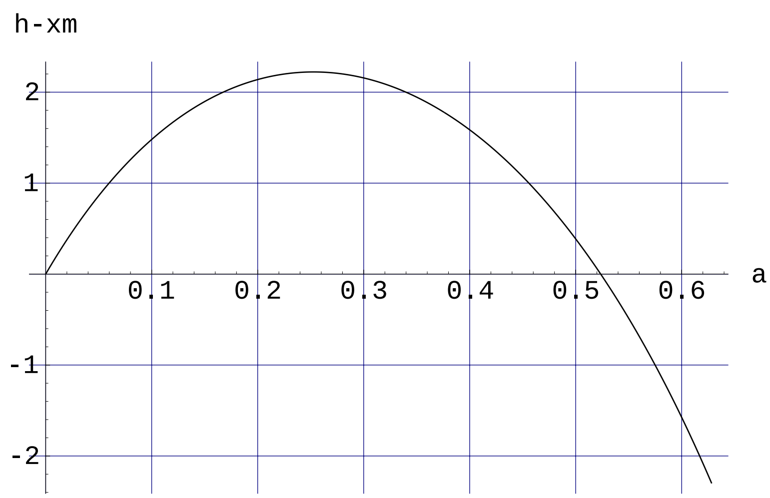

Abbildung 6: Differenz $h - x_m$ bei variablen Winkel α

Mit Hilfe von *Mathematica* findet man als Nullstellen von f:

$$\{\{\alpha \to 0\}, \{\alpha \to -\pi\}, \{\alpha \to \frac{\pi}{6}\}, \{\alpha \to \frac{5\pi}{6}\}, \{\alpha \to \pi\}\}$$

Für $\alpha = \frac{\pi}{6} = 30°$ befindet sich x_m genau in Höhe von h.

$$x_m = \frac{h}{\cos[2 \cdot 30°] + \sin[30°]} = \frac{h}{0.5 + 0.5} = 20\,cm \tag{18}$$

$$R = x_m \cdot \sin[\alpha] = h \cdot \sin[30°] = \frac{h}{2} = 10\,cm \tag{19}$$

Bei einem halben Öffnungswinkel von $\alpha = 30°$ beträgt der Radius der optimalen Eiskugel $R = 10\,cm$.

Abbildung 7 zeigt, das f ein lokales Minimum auf dem Intervall $0 \leq \alpha \leq 30°$ besitzt.

$$f' = \frac{h \cdot (\cos[\alpha] - 2\sin[2\alpha])^2}{(\cos[2\alpha] + \sin[\alpha])}, \quad f' = 0, \quad \alpha \to \arcsin[\frac{1}{4}] \tag{20}$$

Für den Winkel $\alpha^* = \arcsin[\frac{1}{4}] = 14.477°$ befindet sich die optimale Kugel am tiefsten im Eisbecher.

Höhe der Kugelkappe

In diesem Abschnitt soll die Höhe der Kugelkappe, welche aus dem Becher ragt untersucht werden. Die Höhe der Kappe ergibt sich aus:

$$d = x_m + R - h = \frac{h}{\cos[2\alpha] + \sin[\alpha]} + \frac{h \cdot \sin[\alpha]}{\cos[2\alpha] + \sin[\alpha]} - h \tag{21}$$

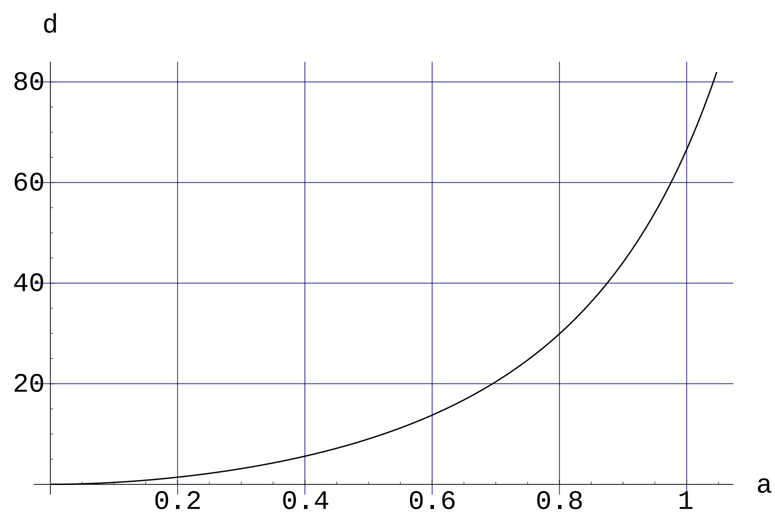

Abbildung 7: Höhe der Kugelkappe in Abhängigkeit von α

Mit größer werdenden Öffnungswinkel α wird die optimale Kugel zunehmend aus dem Becher gedrängt.