Die Sehne im Dreieck

aus *Crux Mathematicorum*

13. Januar 2003

1. Von einem Punkt D der Hypothenuse $\overline{AB}$ eines rechtwinkligen Dreiecks ABC werden die Lote $\overline{DE}$ und $\overline{DF}$ auf die Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ gefällt. Man bestimme diejenige Position von D für die die Strecke $\overline{EF}$ minimale Länge hat.

2. Welche Lage ergibt sich für D, wen das Dreieck ABC spitzwinklig ist ?

Punktezahl=8

Lösung zum Aufgabenteil 1

Wir bezeichen die Teilstrecken auf den Dreieckseiten entsprechend Abbildung 2.

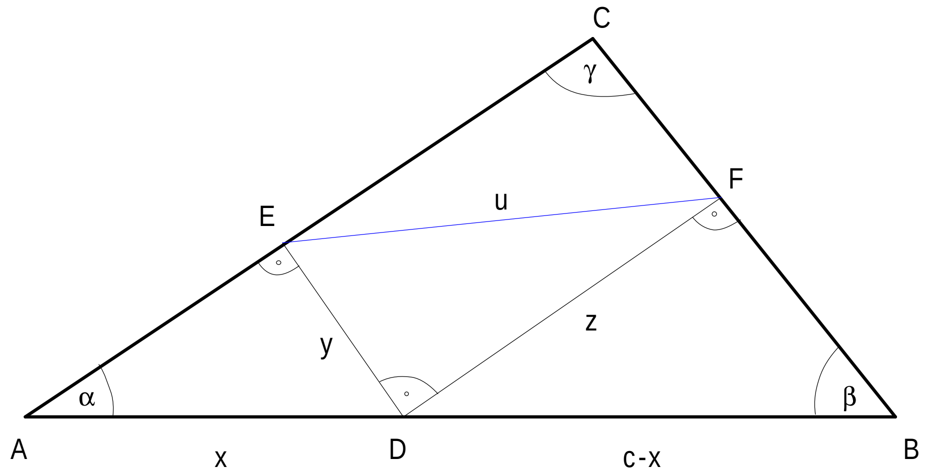

Abbildung 1: Bild zur Lösung Teil 1

Das Dreieck DFB ist dem Dreieck ABC ähnlich, es folgt :

$$\frac{z}{c-x} = \frac{b}{c} \quad \rightarrow \quad z = \frac{b\,(c-x)}{c} \tag{1}$$

Das Dreieck AED ist dem Dreieck ABC ähnlich, es folgt :

$$\frac{y}{x} = \frac{a}{c} \quad \rightarrow \quad y = \frac{a\,x}{c} \tag{2}$$

Mit dem *Satz des Pythagoras* im rechtwinkligen Dreieck DEF berechnen wir:

$$u^2 = y^2 + z^2 = \left(\frac{a\,x)}{c}\right)^2 + \left(\frac{b\,(c-x)}{c}\right)^2 \tag{3}$$

Es genügt das Minimum von u^2 an Stelle von u zu bestimmen.

$$\frac{d\,u^2}{d\,x} = \frac{2\,a^2\,x}{c^2} - \frac{2\,b^2\,(c-x)}{c^2} = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{b^2}{c} \tag{4}$$

Diese Entfernung entspricht genau dem Höhenschnittpunkt von h_c auf der Seite c im rechtwinkligen Dreieck.

Lösung zum Aufgabenteil 2

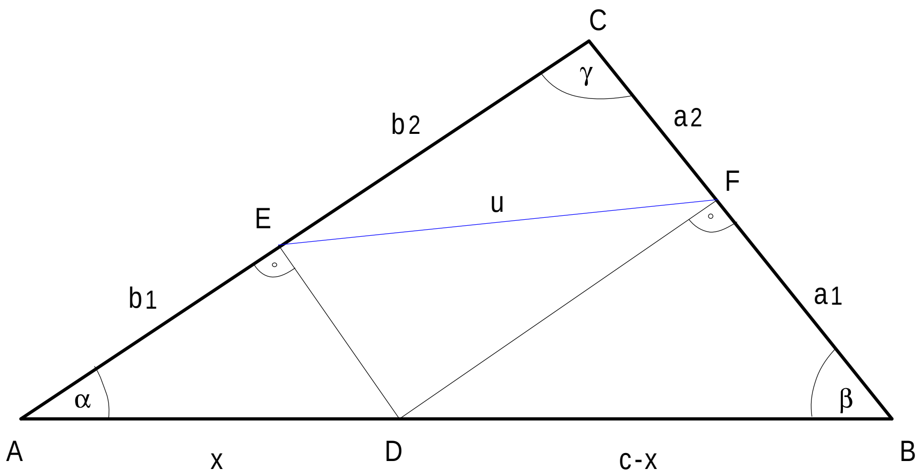

Abbildung 2: Bild zur Lösung Teil 2

Im spitzwinkligen Dreieck berechnen wir u aus dem Kosinussatz. Zunächst ermitteln wir die Teilstrecken a_2 und b_2.

$$a_2 = a - a_1 = a - (c - x)\cos(\beta) \qquad b_2 = b - b_1 = b - x\,\cos(\alpha) \tag{5}$$

$$u^2 = {a_2}^2 + {b_2}^2 - 2\,a_2\,b_2\,\cos(\gamma) \tag{6}$$

Für die Winkel schreiben wir:

$$\cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}, \quad \cos(\beta) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,a\,c}, \quad \cos(\gamma) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,a\,b} \tag{7}$$

Nach dem Einsetzen und Zusammenfassen ergibt sich der Ausdruck:

$$u^2 = -\frac{(a^4 + (b^2 - c^2)^2 - 2a^2(b^2 + c^2))(b^2(c - x) + x(a^2 + c(-c + x)))}{4a^2b^2c} \tag{8}$$

Nun bilden wir die erste Ableitung von u^2 :

$$\frac{d\,u^2}{d\,x} = -\frac{\left(a^4 + (b^2 - c^2)^2 - 2a^2(b^2 + c^2)\right)(a^2 - b^2 + cx + c(-c + x))}{4a^2b^2c} \tag{9}$$

und bestimmen deren Nullstelle:

$$\frac{d\,u^2}{d\,x} = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c} \tag{10}$$

Auch in diesem Fall bildet x den Schnittpunkt zwischen Höhe h_c und Seite c im spitzwinkligen Dreieck.