Das Dachfenster

Peter G. Nischke, Berlin

27. Januar 2002

Herr K. hat soeben sein lang erträumtes Eigenheim bezogen. Als Hobbymathematiker liebt er regelmäßige, geometrische Formen. Der Querschnitt seines Dachstuhls entspricht einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge a.

Nach all den langen Jahren des Wartens und Sparens hat er nun endlich seinen eigenen Hobbyraum unterm Dachstuhl, wo er sich in Ruhe den mathematischen Herausforderungen der Jetztzeit stellen kann. Natürlich möchte er die Aufgaben bei optimalen Lichtverhältnissen *ins Visir* nehmen. Schnell ist ein Skizze zur Lage des Schreibtisches bezüglich des Dachfensters entworfen (Abbildung 1). Der Schreibtisch muß so aufgestellt werden, daß der Lichtöffnungswinkel β, zum Dachfenster hin, maximal wird. Nach langer Rechnung ohne brauchbares Ergebnis beschließt Herr K. schließlich seinen PC aufzubauen, ohne dessen Unterstützung diese Aufgabe wohl kaum zu lösen ist.

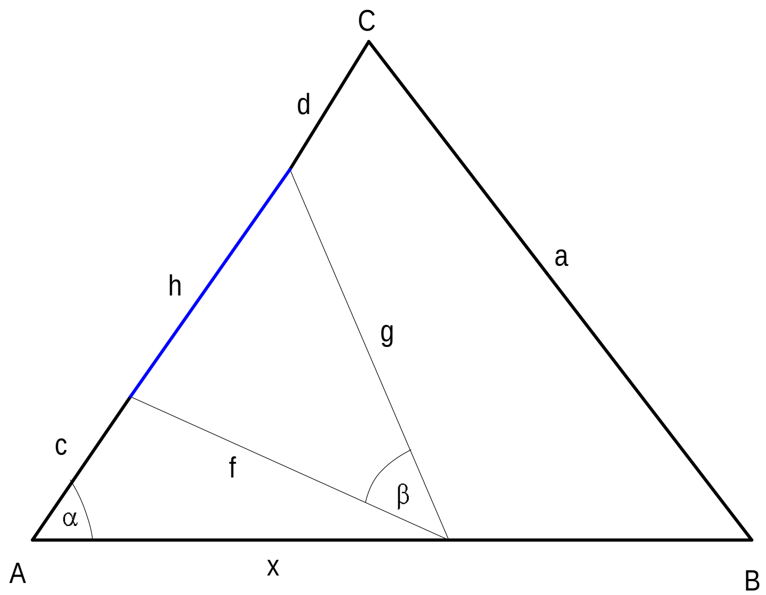

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabe

In welcher Entfernung x vom Punkt A aus, muß Herr K. seinen Tisch aufstellen ?
(Punktezahl = 8)

Lösungsweg

Wir bezeichnen die Strecken zwischen Tisch und Fensterkante mit f und g. Die Strecke h ergibt sich als Differenz aus:

$$h = a - c - d \tag{1}$$

Winkel β folgt aus dem Kosinussatz:

$$\cos(\beta) = \frac{f^2 + g^2 - h^2}{2\,f\,g} \quad \rightarrow \quad \beta = \arccos\left(\frac{f^2 + g^2 - (a-c-d)^2}{2\,f\,g}\right) \tag{2}$$

Die Strecken f und g ergeben sich ebenfalls aus dem Kosinussatz, wobei der Innenwinkel $\alpha = 60°$ vom gleichseitigen Dreieck bekannt ist.

$$f^2 = c^2 + x^2 - 2\,c\,x\cos(60°) = c^2 + x^2 - c\,x \tag{3}$$

$$g^2 = (a-d)^2 + x^2 - 2\,(a-d)\,x\cos(60°) = (a-d)^2 + x^2 - (a-d)\,x \tag{4}$$

Nun setzen wir die Ausdrücke für f und g in Gleichung (2) ein :

$$\beta(x) = \arccos\left(\frac{c^2 + x^2 - c\,x + (a-d)^2 + x^2 - (a-d)\,x - (a-c-d)^2}{2\,\sqrt{c^2 + x^2 - c\,x}\,\sqrt{(a-d)^2 + x^2 - (a-d)\,x}}\right) \tag{5}$$

Nach Zusammenfassen und Vereinfachen mit *Mathematica* ergibt sich:

$$\beta(x) = \arccos\left(\frac{2c(a-d) - (a+c-d)x + 2x^2}{2\sqrt{c^2 - cx + x^2}\sqrt{(a-d)^2 + (-a+d)x + x^2}}\right) \tag{6}$$

Die Ableitung der Arcuscosinusfunktion ist:

$$y = \arccos(x) \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{7}$$

Die 1. Ableitung nach x führt auf einen komplizierten Ausdruck:

$$\frac{d\beta}{dx} = -\frac{\sqrt{3}(-ac + cd + x^2)\sqrt{\frac{(-a+c+d)^2 x^2}{(c^2-cx+x^2)\left((a-d)^2+(-a+d)x+x^2\right)}}}{2x\sqrt{c^2 - cx + x^2}\sqrt{(a-d)^2 + (-a+d)x + x^2}} \tag{8}$$

Der Quotient ist genau dann Null, wenn die Zählerfunktion Null ist. Damit vereinfacht sich die Suche nach der Nullstelle erheblich:

$$0 = x\,(-a+c+d)\,(-ac+cd+x^2) \tag{9}$$

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = -\sqrt{a\,c - c\,d}, \qquad x_3 = \sqrt{a\,c - c\,d} \tag{10}$$

Als sinnvolle Lösung kommt nur $x_3 = \sqrt{a\,c - c\,d}$ in Betracht. Wir setzen x_3 in die Gleichung (6) ein und erhalten nach Vereinfachung :

$$\beta(x_3) = \arccos\left(\frac{4c(a-d) - \sqrt{c(a-d)}(a+c-d)}{2\sqrt{c(a+c-\sqrt{c(a-d)}-d)}\sqrt{(a-d)(a+c-\sqrt{c(a-d)}-d)}}\right) \tag{11}$$