Die Turbo-Badewanne

Ein Beitrag von Ingmar Rubin

4. September 2000

Vor Kurzem entdeckte ich im Internet unter `www.mathe-treff.de` die folgende Aufgabenstellung, welche ich um einige Angaben ergänzt habe.

Franz Prahlhans muß immer das Neueste haben. Jetzt hat er sich eine neue Turbo-Badewanne gekauft, die innerhalb von 4 Minuten gefüllt werden kann, wenn der Wasserhahn ganz aufgedreht ist. Die Wanne besteht aus edelsten Materialien: 400 kg Marmor, Armaturen aus Platin und der Abflußstöpsel - mit einem Durchmesser von $5\,cm$ - ist mit einem Diamanten verziert. Die innere Form der Wanne entspricht einem Ellipsoid mit den Halbachsen $a = 135\,cm, \quad b = 50\,cm$ und $c = 40\,cm$. Wenn man den Abfluß öffnet, ist die Wanne innerhalb von 3 Minuten leer.

a) Wie lange braucht Franz eigentlich, um die Wanne zu füllen, wenn er wieder einmal vergessen hat, den Abfluß zu verschließen ?

b) Was ändert sich an der Aufgabenstellung wenn man die beiden Zeitangaben vertauscht, d.h. die Wanne füllt sich in 3 min und würde sich in 4 min vollständig leeren ?

c) Unter der Annahme, das sich die Wanne in 4 min leert, soll die Zeit berechnet werden bis sich der Wasserspiegel nach ziehen des Stöpsels um die Hälfte gesenkt hat.

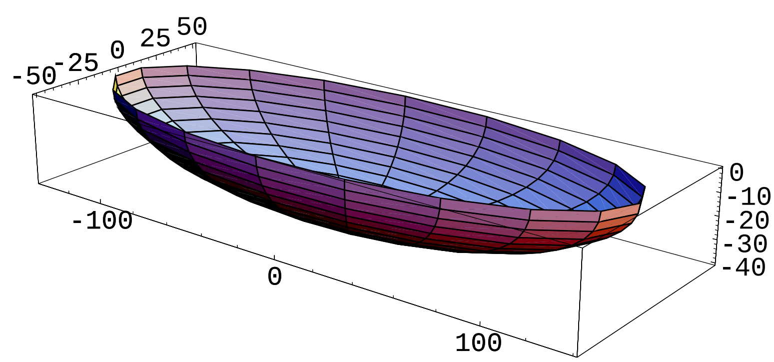

Abbildung 1: Elliptisch geformte Badewanne, Maßangaben in cm

Lösung zum Aufgabenteil *a*

Es seien folgende Bezeichner vereinbart:

- V Volumen der Badewanne,
- h Höhe der Badewanne,
- g Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche $g = 9.81\,\frac{m}{s^2}$,
- v_{zu} Zufließgeschwindigkeit aus dem Wasserhahn in $\frac{l}{s}$,
- v_1 Sinkegeschwindigkeit des Wasserspiegels in der Wanne,
- v_2 Abfließgeschwindigkeit am Stöpsel,
- $A_1(h)$ Wannenquerschnitt in Abhängigkeit von der Höhe,
- A_2 Querschnittsfläche des Stöpsels,

Die Turbo-Badewanne wird sich bei geöffnetten Abfluß niemals füllen. Die Zufließgeschwindigkeit ist kleiner als die Abfließgeschwindigkeit. Das Volumen der elliptisch geformten Wanne berechnet sich zu:

$$V = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot a \cdot b \cdot c = 565.5\,l \tag{1}$$

Hinweis: Die Formel aus [1] gibt das Volumen für einen ganzen Ellipsoid an. Im vorliegenden Fall muß deshalb der Faktor von 4/3 auf 2/3 reduziert werden.

$$v_{zu} = \frac{565.5\,l}{4 \cdot 60\,s} = 2.356\,\frac{l}{s}, \qquad v_2 = \frac{565.5\,l}{3 \cdot 60\,s} = 3.141\,\frac{l}{s} \tag{2}$$

Eine Wasserzunahme in der Wanne setzt voraus, das $v_{zu} > v_2$ ist. Das ist hier nicht der Fall.

Lösung zum Aufgabenteil *b*

Vertauscht man die Zeitangaben in der Aufgabe, so wird die Lösung schwieriger. Die Zufließgeschwindigkeit ist jetzt größer als die durchschnittliche Abfließgeschwindigkeit. Ohne analytische Rechnung läßt sich keine Aussage treffen, wie weit sich die Wanne bei geöffneten Abfluß füllen wird. Aus dem Volumen der Wanne und der Zeit bis sie sich bei geschlossenem Abfluß gefüllt hat, folgt die Zufließgeschwindigkeit:

$$v_{zu} = \frac{V}{t_{zu}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot a \cdot b \cdot c}{t_{zu}} = \frac{565.5\,l}{3 \cdot 60\,s} = 3.141\,\frac{l}{s} \tag{3}$$

Die Abfließgeschwindigkeit v_2 ändert sich in Abhängigkeit von der Höhe des Wasserspiegels in der Badewanne nach dem Gesetz von *Toricelli* [2].

$$v_2(h) = \mu \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}, \qquad \mu_{wasser} = 0.6 \tag{4}$$

Die Sinkgeschwindigkeit des Wasserspiegels in der Wanne folgt aus der *Kontinuitätsgleichung*:

$$v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2 = const. \tag{5}$$

Aus dem Durchmesser des Stöpsels folgt der Querschnitt vom Abfluß:

$$A_2 = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \tag{6}$$

Die abfließende Wassermenge je Zeiteinheit in Abhängigkeit von der Wasserspiegelhöhe ergibt sich zu:

$$A_1 \cdot v_1 = \frac{A_1 \cdot dh}{dt} = \frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot \mu \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \tag{7}$$

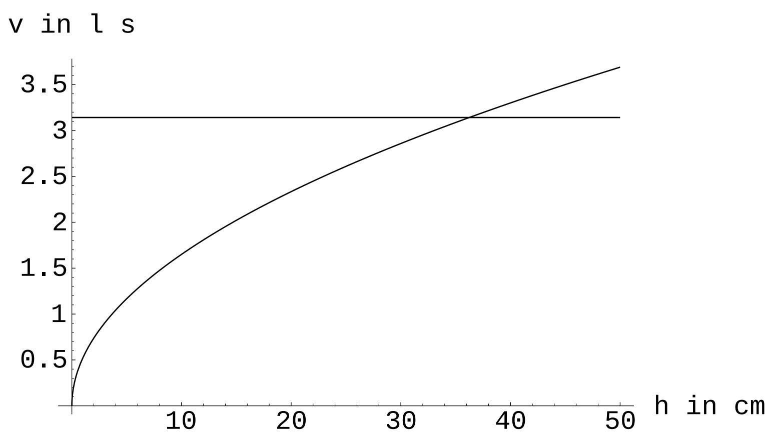

Abbildung 2: Abfließgeschwindigkeit der Turbo-Badewanne

Aus der Grafik ist erkennbar, das die Wanne sich höchstens bis $h = 36\,cm$ füllen kann, da dann die Abfließgeschwindigkeit die Größe der Zufließgeschwindigkeit erreicht hat.

Lösung zum Aufgabenteil *c*

Es muß beachtet werden, das der Wannenquerschnitt sich in Abhängigkeit von der Höhe ändert.

Aus der Geometrie der Badewanne muß eine Funktion $A_1 = A_1(h)$ abgeleitet werden. Der Querschnitt der Wanne entspricht einer Ellipse, wobei die Länge der Halbachsen a und b von der Höhe des Wasserspiegels abhängig sind. Zunächst wird die Flächenformel für die Ellipse bereitgestellt. Wir verwenden dazu die Parameterdartstellung. Mit Hilfe der *Leibnizschen Sektorenformel* wird anschließend die Fläche berechnet.

Die Koordinaten vom Punkt $P(x, y)$ berechnen sich zu:

$$x = a \cdot \cos(\alpha), \qquad y = b \cdot \sin(\alpha) \tag{8}$$

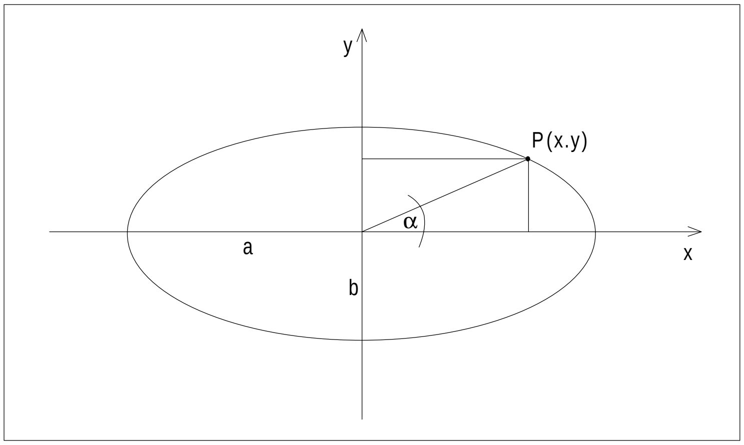

Abbildung 3: Ellipse in Parameterdarstellung

Fläche der Ellipse *Leibnizsche Sektorenformel*:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \int\limits_{\alpha=0}^{\alpha=2\pi} (x \cdot \dot{y} - \dot{x} \cdot y) \cdot d\,\alpha \tag{9}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \int\limits_{\alpha=0}^{\alpha=2\pi} (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \cdot d\,\alpha \tag{10}$$

$$A = \pi \cdot a \cdot b \tag{11}$$

Die Größen a und b sind Funktionen des Winkels λ. Abbildung 4 zeigt die Abhängigkeit für die große Halbachse a. Dreht man das Bild 90^oum die z-Achse, so erhält man analaog die Abh

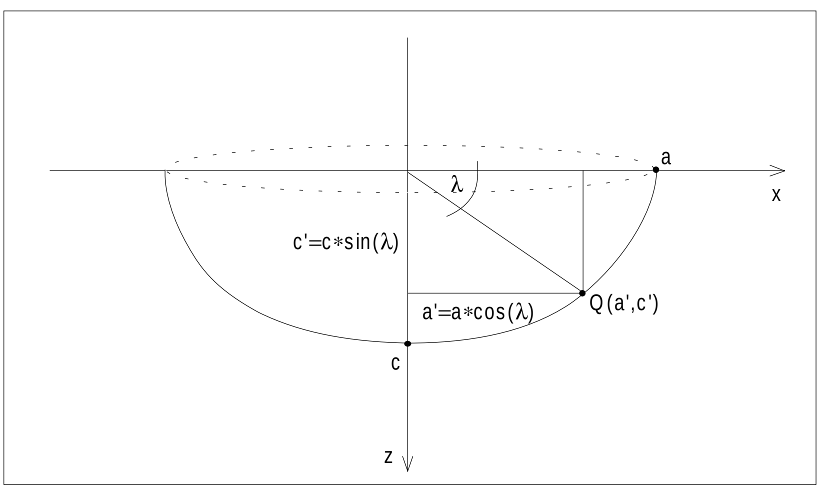

Abbildung 4: Abhängigkeit der Ellipsenachse $a^{'}$vom Winkel λ

$$a^{'}(\lambda) = a \cdot \cos(\lambda), \qquad b^{'}(\lambda) = b \cdot \cos(\lambda) \tag{12}$$

Die Höhe des Wasserspiegels folgt aus:

$$h = c \cdot (1 - \sin(\lambda)) \tag{13}$$

Die Querschnittsfläche der Badewanne in Abhängigkeit vom Winkel λ , und davon von der Wasserspiegelhöhe, beträgt:

$$A^{'}(\lambda) = \pi \cdot a \cdot b \cdot \cos^2(\lambda) \tag{14}$$

Das Volumen der Badewanne erhält man durch Aufsummierung aller Ellipsenscheiben mit der infinitesimalen Höhe dh von $h = 0$ bis $h = c$:

$$V = \int_{h=0}^{h=c} A^{'}(\lambda) \cdot d\,h \tag{15}$$

Da $A^{'}$in Abhängigkeit vom Winkel λ gegeben ist, wird die Integrationsvariable h nach λ transformiert.

$$h = c \cdot (1 - \sin(\lambda)) \quad \longrightarrow \quad dh = -c \cdot \cos(\lambda) \cdot d\,\lambda \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
V &= \int_{\lambda=\pi/2}^{\lambda=0} -A^{'}(\lambda) \cdot c \cdot cos(\lambda) \cdot d\,\lambda && (17)\\
V &= \pi \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \int_{\lambda=\pi/2}^{\lambda=0} -cos^3(\lambda) \cdot d\,\lambda && (18)\\
V &= \pi \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \left[\frac{1}{12} \cdot (-9 \cdot \sin(\lambda) - \sin(3 \cdot \lambda))\right]_{\lambda=\pi/2}^{\lambda=0} && (19)\\
V &= \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot a \cdot b \cdot c && (20)
\end{aligned}$$

Aus dem Kontinuitätssatz und der *Toricelli-Formel* kann jetzt die Zeit T berechnet werden, bis sich die Wanne vollständig entleert hat. Der Vollständigkeit halber werden noch einmal alle Beziehungen zwischen den Größen zusammengetragen, wobei die Abhängigkeit vom Winkel λ dargestellt wird:

Kontinuitätssatz:

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 \tag{21}$$

elliptische Querschnittsfläche:

$$A_1(\lambda) = \pi \cdot a \cdot b \cdot \cos^2(\lambda) \tag{22}$$

Sinkgeschwindigkeit des Wasserspiegels in der Wanne:

$$v_1 = \frac{dh}{dt} = \frac{-c \cdot \cos(\lambda) \cdot d\lambda}{dt} \tag{23}$$

Fläche vom Wannenabfluß (Stöpsel):

$$A_2 = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \tag{24}$$

Abfließgeschwindigkeit nach *Toricelli*

$$v_2(h) = \mu \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \mu \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot c \cdot (1 - \sin(\lambda))} \tag{25}$$

Das Einsetzen der Größen in den Kontinuitätssatz liefert:

$$\pi \cdot a \cdot b \cdot \cos^2(\lambda) \cdot \frac{-c \cdot \cos(\lambda) \cdot d\,\lambda}{d\,t} = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot \mu \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot c \cdot (1 - \sin(\lambda))} \tag{26}$$

Die Differentialgleichung 1.Ordnung kann nach Trennung der Veränderlichen integriert werden.

$$\int_{t=0}^{t=T} d\,t = \frac{-4 \cdot a \cdot b \cdot c}{d^2 \cdot \mu \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot c}} \cdot \int_{\lambda=\pi/2}^{\lambda=0} \frac{\cos^3(\lambda)}{\sqrt{1 - \sin(\lambda)}} \cdot d\,\lambda \tag{27}$$

Das Integral kann mittels Substitution $z = \sin(\lambda) \quad \rightarrow \quad dz = cos(\lambda) \cdot d\lambda$ gelöst werden.

$$\int \frac{\cos^3(\lambda) \cdot d\,\lambda}{\sqrt{1 - \sin(\lambda)}} \qquad \longrightarrow \qquad \int \frac{1 - z^2}{\sqrt{1 - z}} \cdot d\,z \tag{28}$$

Die Auslaufzeit der gefüllten Wanne beträgt:

$$T = \frac{-4 \cdot a \cdot b \cdot c}{d^2 \cdot \mu \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot c}} \cdot \left[\frac{-30 + 2 \cdot cos(2 \cdot \lambda) + 35 \cdot \sin(\lambda) + 3 \cdot \sin(3 \cdot \lambda)}{30 \cdot \sqrt{1 - \sin(\lambda)}} \right]_{\lambda=\pi/2}^{\lambda=0}$$

$$T = \frac{-4 \cdot a \cdot b \cdot c}{d^2 \cdot \mu \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot c}} \cdot \left[-\frac{14}{15} \right] = 239.88\,s \approx 4\,min$$

Um die Zeit $T_{1/2}$ zu bestimmen, bis sich der Wasserspiegel auf die Hälfte gesenkt hat, bestimmen wir zunächst den zugehörigen Winkel λ (siehe auch Bild 3) .

$$0.5 = 1 - \sin(\lambda) \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{\pi}{6}$$

$$T_{1/2} = \frac{-4 \cdot a \cdot b \cdot c}{d^2 \cdot \mu \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot c}} \cdot \left[\frac{-30 + 2 \cdot cos(2 \cdot \lambda) + 35 \cdot \sin(\lambda) + 3 \cdot \sin(3 \cdot \lambda)}{30 \cdot \sqrt{1 - \sin(\lambda)}} \right]_{\lambda=\pi/6}^{\lambda=0}$$

$$T_{1/2} = 136.9\,s$$

Literatur

[1] Bronstein, I.N.: Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt a.M. 1999

[1] Stoecker, R.: Taschenbuch der Physik, Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt a.M. 1998

[3] Greiner, W.: Hydrodynmaik, Reihe Theoretische Physik Teil 2A, Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt a.M. 1991