# Winterrätsel

aus Übungsheft *Gewöhnliche Differentialgleichungen Teil II*

TU-Berlin

An einem Wintertag begann es am Vormittag zu Schneien. Der Schnee fiel gleichmäßig den ganzen, weiteren Tag über.

Um 12 Uhr Mittags begann ein Schneeräumfahrzeug die Straße der Breite $b$ zu säubern. Das Fahrzeug schafft in der Stunde ein konstantes Volumen von $a \cdot m^3$ Schnee zu räumen.

Um 14 Uhr hatte das Fahrzeug 2 Kilometer Straße geräumt. Nachmittags um 16 Uhr befand es sich 1 Kilometer weiter.

**Frage 1: Wann begann es am Vormittag zu schneien ?**

Um 17 Uhr legte der Fahrer eine Pause von einer Stunde ein. Um 18 Uhr wendete er das Fahrzeug und reinigte die selbe Strecke bis zu seinem Startpunkt. Es schneite ohne Unterbrechung weiter.

**Frage 2: Wann erreichte der Fahrer seinen Startpunkt ?**

Punktezahl=12

## Lösung 1: Hinfahrt

Wir führen folgende Bezeichner ein:

- $a$ Schneemenge, welche das Räumfahrzeug je Stunde beseitigen kann ,
- $b$ Breite der Straße ,
- $h(t)$ Höhe der Schneedecke in Abhängigkeit von der Zeit ,
- $k$ Schneehöhe, welche pro Stunde auf die Staße fällt ,
- $t$ laufende Zeit,
- $t_0$ Zeitpunkt als es Vormittags zu Schneien begann ,
- $t_s$ Startzeitpunkt (12 Uhr Mittags) der SchneeFahrzeug ,
- $v$ Geschwindigkeit vom Räumfahrzeug,
- $x$ laufender Ort der SchneeFahrzeug bezogen auf den Startpunkt

Die Höhe der Schneedecke auf der Straße nimmt mit laufender Zeit linear zu. Zum Zeitpunkt $t = t_0$ muß $h(t) = 0$ betragen.

$$h(t) = k \cdot (t - t_0), \qquad h(t_0) = 0 \tag{1}$$

Es sei $t_0 = 10$ Uhr und $k = 0.2\, m/h$ dann erhält man folgende Graphik :


Abbildung 1: Zuhnahme der Schneehöhe über der Tageszeit

Das Volumen an Schnee in einem schmalen Streifen $dx$ der Straße beträgt:

$$dV = h(t) \cdot b \cdot dx \tag{2}$$

Das Räumfahrzeug schafft je Stunde ein konstantes Volumen an Schnee zu beseitigen:

$$\frac{dV}{dt} = a \quad \rightarrow \quad dV = a \cdot dt \tag{3}$$

Da das Fahrzeug im Moment des Räumens den Schnee vollständig beseitig, muß Volumenäquivalenz gelten:

$$dV = h(t) \cdot b \cdot dx = a \cdot dt \tag{4}$$

Aus der Volumenäquivalenz folgt ein Differentialgleichung, welche die Geschwindigkeit des Räumfahrzeuges bestimmt:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{a}{b \cdot k \cdot (t - t_0)} = \frac{\beta}{t - t_0}, \qquad \beta = \frac{a}{b \cdot k} \tag{5}$$

Die Geschwindigkeit des Fahrzeuges wird mit zunehmender Zeit stetig langsamer, da die Schneemenge vor dem Fahrzeug ständig steigt.

Der Weg berechnet sich durch Integration:

$$x(t) = \int_{t_s}^{t_x} \frac{\beta}{t - t_0} \cdot dt = \beta \cdot \ln \left[ \frac{t_x - t_0}{t_s - t_0} \right] \tag{6}$$

Aus der Aufgabenstellung ist bekannt:

$$x_1 = \int_{t_s=12}^{t_1=14} \frac{\beta}{t - t_0} \cdot dt = \beta \cdot \ln \left[ \frac{t_1 - t_0}{t_s - t_0} \right] = 2\,km \tag{7}$$

und

$$x_2 = \int_{t_s=12}^{t_2=16} \frac{\beta}{t - t_0} \cdot dt = \beta \cdot \ln \left[ \frac{t_2 - t_0}{t_s - t_0} \right] = 3\,km \tag{8}$$

Aus der Lösung von Gleichung (7) und (8) erhält man:

$$t_0 = 13 - \sqrt{5} = 10.7639 = 10\,Uhr \quad 45\,min \quad 50\,sek \tag{9}$$

$$\beta = \frac{1}{\log\left[\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right)\right]} \tag{10}$$

Es hat am Vormittag um 10 Uhr 45 Min und 50 Sek zu Schneien angefangen.

Das $s{-}t$ Diagramm zeigt den Bewegungsvorgang des Fahrzeugs im Zeitraum von 12 Uhr bis 17 Uhr.

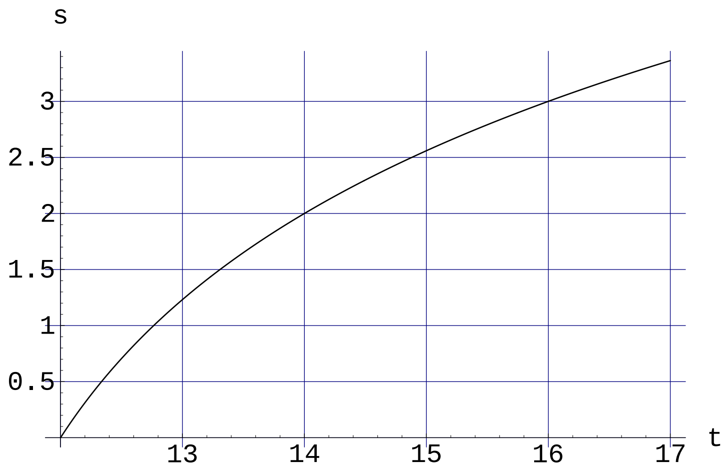


Abbildung 2: Weg-Zeit Diagramm des Schneeräumfahrzeugs

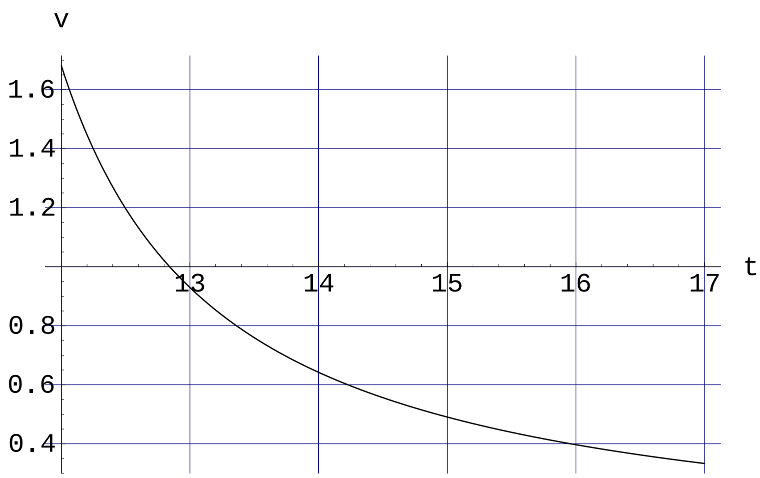


Abbildung 3: Geschwindigkeits - Zeit Diagramm von 12 Uhr bis 17 Uhr

## Lösung 2: Rücktour

Die Größen $t_0$ und $\beta$ sind aus der voran gegangenen Lösung bekannt. Wir berechnen zunächst den Ort $x_3$, an dem der Fahrer um 17 Uhr seine Pause (Kehre) einlegt :

$$x_3 = \int_{t_1=12}^{t_2=17} \frac{\beta}{t - t_0} \cdot dt = \beta \cdot \ln \left[ \frac{17 - t_0}{12 - t_0} \right] = 3.36321 \, km \tag{11}$$

Während der Schneeräumumg hat sich hinter der Fahrzeug wieder Schnee angesammelt. Die Höhe der Schneedecke ist damit Orts- und Zeitabhängig ! In der Funktion

$$h = k \cdot (t - t_v(x)) \tag{12}$$

ist die Zeit $t_v$ keine Konstante mehr. Für jeden Ort aus dem Intervall $0 \leq x \leq x_3$ gibt es eine Zeit $t_v$ zu der es zu Schneien begann - genau dann, als das Fahrzeug den Ortspunkt passiert hat.

Die Funktion $t_v(x)$ ist die Umkehrfunktion der Fahrzeugbewegung $x(t)$:

$$t_v = t_0 + (t_s - t_0) \cdot \exp \frac{x}{\beta} \tag{13}$$

$$h(t, x) = k \cdot \left[ t - \left( t_0 + (t_s - t_0) \cdot \exp \frac{x}{\beta} \right) \right] \tag{14}$$

Aus der Volumenäquivalenz erhalten wir wieder die Bewegungsdifferentialgleichung:

$$dV = h(t) \cdot b \cdot (-dx) = a \cdot dt \tag{15}$$

Das negative Zeichen vor $dx$ zeigt an, das sich das Fahrzeug in entgegengesetzter Richtung bewegt.

$$k \cdot \left[ t - \left( t_0 + (t_s - t_0) \cdot \exp \frac{x}{\beta} \right) \right] \cdot b \cdot (-dx) = a \cdot dt \tag{16}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\beta}{t_0 - t + (t_s - t_0) \cdot \exp \frac{x}{\beta}} \tag{17}$$

Bei Gleichung (17) handelt es sich um eine nichtlineare DGL 1.Ordnung. Im folgenden werden zwei Lösungswege gezeigt.

### Numerische Lösung

Zum Zeitpunkt $t = 18$ Uhr befindet sich das Fahrzeug am Ort $x_3$ (Anfangsbedingung):

$$AB: \quad x(t = 18) = \beta \ln \left[ \frac{17 - t_0}{12 - t_0} \right] \tag{18}$$

Als Integrationsintervall wählen wir $18 \leq t \leq 33$. Es ergibt sich folgende Lösungskurve:

Bei $t = 32.158$ unterschreitet die Kurve die Nullinie. Das ist der Zeitpunkt an dem der Fahrer den Ort $x = 0$, d.h. seinen Startpunkt erreicht hat. Da alle Zeitangaben absolut auf 0 Uhr des Starttages bezogen sind, ergibt sich die Ankunftszeit am Folgetag:

$$t_a = 32.158\,h - 24\,h = 8.158\,h = 8\,Uhr \quad 9\,Min \quad 28\,sec \tag{19}$$

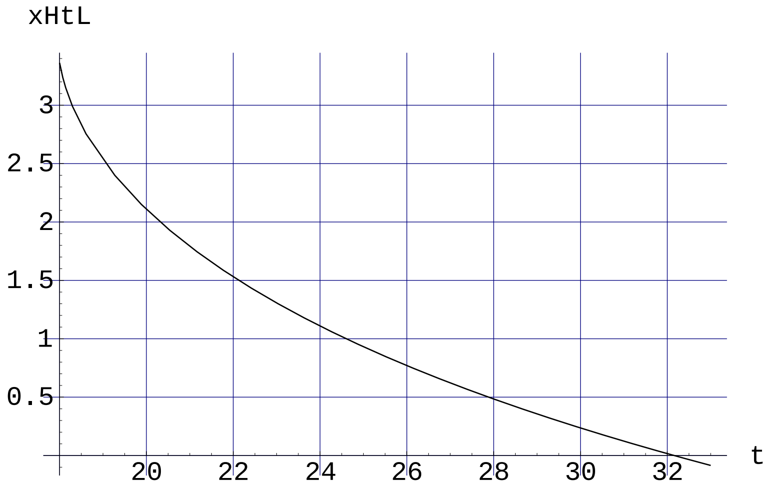


Abbildung 4: Weg-Zeit Diagramm für den Rückweg des Fahrzeugs

## Exakte Lösung

Mit Hilfe eines *integrierenden Faktors* kann die DGL in eine *exakte Differentialgleichung* überführt werden. Unter einer exakten DGL versteht man die Form:

$$M(t,u)\cdot dt + N(t,u)\cdot du = 0 \tag{20}$$

Dabei muß

$$\frac{dM(t,u)}{du} = \frac{dN(t,u)}{dt} \tag{21}$$

erfüllt sein.
Wir führen folgende Substitution ein:

$$u = \frac{x}{\beta} \quad \rightarrow \quad \frac{du}{dt} = \frac{1}{t_0 - t + (t_s - t_0)\cdot \exp u} \tag{22}$$

Als integrierenden Faktor multiplizieren wir beide Seiten der DGL mit $\mu = \exp(u)$

$$-\exp(u)\cdot dt + [t_0 - t + (t_s - t_0)\cdot \exp(2\cdot u)]\cdot du = 0 \tag{23}$$

Die allgemeine Lösung der exakten DGL ergibt sich aus:

$$\phi(u,t) = \int_{t_s}^{t} M(t,u)dt + \int_{u_0}^{u} N(t,u)du \qquad \phi(u,t) = C \tag{24}$$

Es handelt sich hier um ein partielle Integration, d.h. $M(t,u)$ wird nach $t$ integriert und $u$ wird dabei als Konstante betrachtet ! Als allgemeine Lösung erhält man:

$$\phi(u,t) = \frac{t_s - t_0}{2}\cdot \exp(2u) - (t - t_0)\cdot \exp(u) \tag{25}$$

Mit der Anfangsbedingung:

$$u(t = 18) = \ln\left[\frac{17 - t_0}{12 - t_0}\right] \tag{26}$$

folgt:

$$\phi_0(u,t) = \frac{t_s - t_0}{2} \cdot \left[\frac{17 - t_0}{12 - t_0}\right]^2 - (18 - t_0) \cdot \left[\frac{17 - t_0}{12 - t_0}\right] = -20.776h \tag{27}$$

und als spezielle (implizite) Lösung:

$$\phi_0 = \frac{t_s - t_0}{2} \cdot \exp(2u) - (t - t_0) \cdot \exp(u) \tag{28}$$

Der Fahrer erreicht seinen Startpunkt wenn $u(t_x) = 0$ gilt.

$$\phi_0 = \frac{t_s - t_0}{2} \cdot 1 - (t_x - t_0) \cdot 1 \quad \rightarrow \quad t_x = 31.157966\,h \tag{29}$$