Das Rätsel von der Fliege auf dem Luftballon

Dr. Klaus Nagel, München

11. September 2001

Ein Luftballon wird so aufgeblasen, daß der Radius mit der Geschwindigkeit v zunimmt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei der Radius $r = r_0$. Auf dem Äquator krabbelt eine Fliege mit der Geschwindigkeit c.

1. Bestimme die Bahnkurve der Fliege in Polarkoordinaten !
2. Zeichne die Kurve für $r_0 = 10\,cm$, $c = 1\,\frac{cm}{s}$, $v = 10\,\frac{cm}{2\pi\,s}$ im Intervall $0 \leq t \leq 260\,s$.
3. Unter welchen Bedingungen für v und c gelingt der Fliege eine Umrundung ?

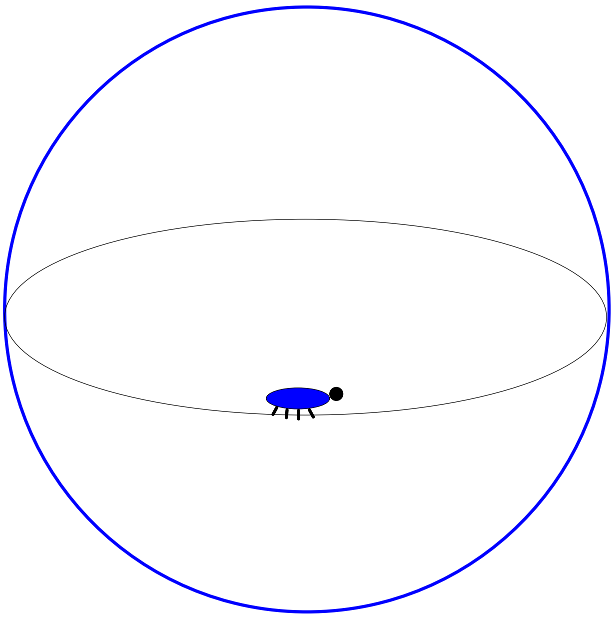

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabe

Punktezahl=10

Bestimmung der Bahnkurve

Wir drehen den Luftballon so, das die Bahnkurve der Fliege in der $x-y$ Ebene eines rechtwinkliegen, kartesischen Koordinatensystems mit dem Ursprung $O(0,0)$ liegt.

Zur Lösung der Aufgabe ist es günstig, die Bahnkurve in Polarkoordinaten herzuleiten. Wir müssen dazu zwei Funktionen bestimmen:

1. $r = r(t)$, Abstand der Fliege vom Koordinatenursprung $O(0,0)$
2. $\alpha = \alpha(t)$, Winkel zwischen Radiusvektor r und der $x-$Achse

Die Fliege befindet sich stets auf der kugelförmigen Oberfläche des Ballons. Ihr radialer Abstand zum Ursprung wächst linear über der Zeit an.

$$r(t) = r_0 + v\,t \tag{1}$$

Nun betrachten wir das Wegelement $ds = c \cdot dt$, welches die Fliege pro Zeitdifferential dt zurückleg. Wir denken uns für einen infinitesimalen Augenblick den Radius $r(t)$ als konstant. Das Bogendifferential ds lautet in Polarkoordinaten:

$$ds = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2}\, d\alpha \tag{2}$$

Für einen Kreis ist $r = const.$, d.h. ds beträgt :

$$ds = \sqrt{r^2 + 0^2}\, d\,\alpha = r\, d\alpha \tag{3}$$

Aus dem Vergleich der Bogendifferentiale erhalten wir eine Differentialgleichung zur bestimmung von $\alpha(t)$:

$$ds = c\,dt = r(t)\,d\alpha \quad \rightarrow \quad \frac{d\alpha}{dt} = \frac{c}{r_0 + v\,t}, \quad AB:\ \alpha(t=0) = 0 \tag{4}$$

Die Integration der DGL (4) liefert:

$$\alpha(t) = \frac{c}{v}\,\log\left(\frac{r_0 + v\,t}{r_0}\right) \tag{5}$$

Damit haben wir eine Parameterdarstellung für die Bahnkurve der Fliege gefunden. Um eine Funktion $r = r(\alpha)$ zu erhalten lösen wir (5) nach $t = f(\alpha)$ auf:

$$t(\alpha) = \frac{r_0\left(\exp^{\frac{\alpha\,v}{c}} - 1\right)}{v} \tag{6}$$

und setzen das Ergebnis in (1) ein:

$$r(\alpha) = r_0\,\exp^{\frac{\alpha v}{c}} \tag{7}$$

Das ist die gesuchte Kurve in Polarkoordinaten. Es handelt sich um eine *logarithmische Spirale*, wie die folgende Abbildung zeigt.

Graphische Darstellung der Bahnkurve

Die logarithmische Spirale besitzt die bemerkenswerte Eigenschaft, alle Kreise im Polardiagramm unter gleichem Winkel zu schneiden. Die bei konstanter Winkeldifferenz aufeinander folgenden Radien bilden eine geometrische Folge. Eine logarithmische Spirale besteht außen wie innen aus einer unendlichen Zahl von Windungen und hat den Pol als asymptotischen Punkt. Weitere interessante Eigenschaften sowie ein geschichtlichen Abriß befinden sich in /1/.

Für $c = 1\,\frac{cm}{s}, \quad v = 10\,\frac{cm}{2\pi\, s}$ erhält man Abbildung 2.

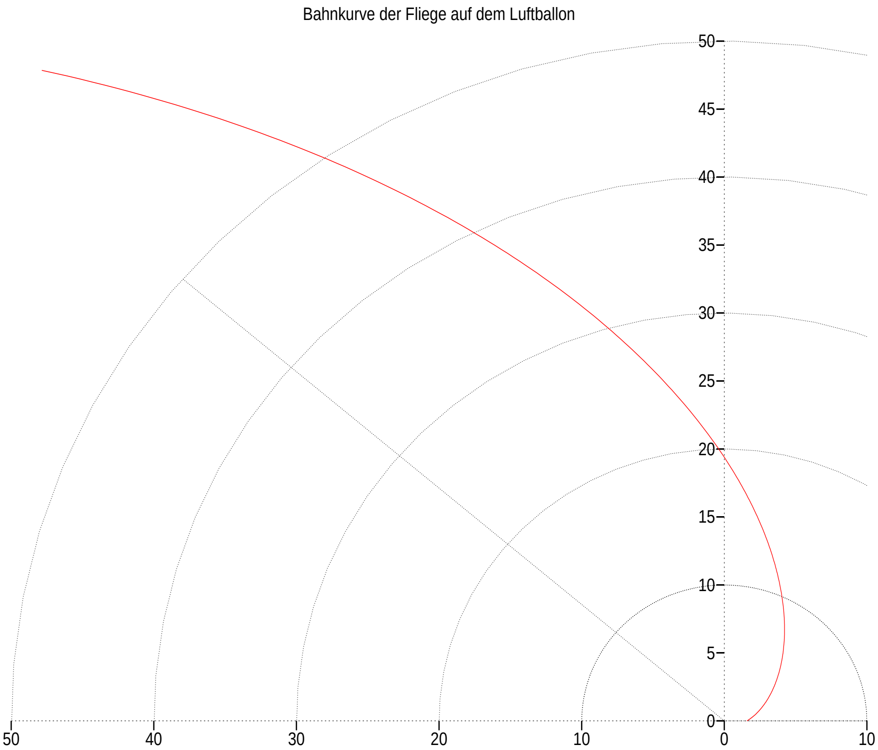

Abbildung 2: Bahnkurve der Fliege im Intervall $0 \leq \alpha \leq 3\pi/4$

Zeit t_x für eine Umrundung

Mit Hilfe von Gleichung (6) können wir die Zeit t_x für die erste Umrundung berechnen. Die Fliege muß dazu das Winkelmaß von $\alpha = 2\,\pi$ zurücklegen.

$$t_x = t(2\,\pi) = \frac{r_0\left(\exp^{\frac{2\pi\, v}{c}} - 1\right)}{v} \tag{8}$$

Man erkennt, das die Zeit für die erste Umrundung exponentiell vom Verhältnis der Geschwindigkeiten v/c abhängig ist. Für $c > 0$ und endlichen v, d.h. $v < \infty$ wird die Fliege stets in endlicher Zeit den Ballon umrunden !

Abbildung 3 zeigt die Bahnkurve für einen Winkel etwas größer als $2\,\pi$. Nach einer Umrundung beträgt die Distanz zur Ballonmitte bereits $r_1 = 35056\,cm = 350.56\,m$ - damit würde der Berliner Fernsehturm fast zweimal übereinander in dem Ballon Platz finden !

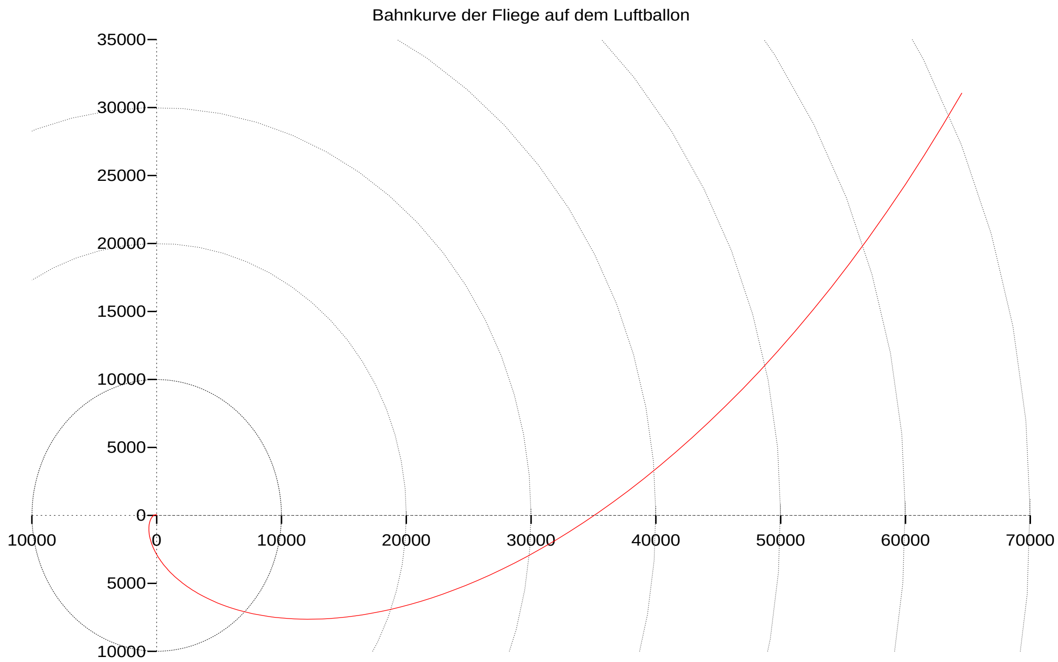

Abbildung 3: Bahnkurve der Fliege im Intervall $0 \leq \alpha \leq 15\pi/7$

Literaturhinweis

/1/ Heitzer, Johanna : **Spiralen** - ein Kapitel phänomenaler Mathematik; Lesehefte Mathematik Ernst Klett Schulbuchverlag Leipzig - Stuttgart - Düsseldorf 1.Auflage 1998, ISBN: 3-12-720044-7