

Bodenfrost

Eine Aufgabe von Ingmar Rubin

5. Oktober 2003

Sei ϑ die Temperatur eines Körpers und ϑ_A die Temperatur seiner Umgebung. Dann existiert eine positive Konstante k und die Temperatur des Körpers gehorcht der DGL

$$\dot{\vartheta}(t) = -k(\vartheta(t) - \vartheta_A(t)) \quad (\text{Newtonsches Abkühlungsgesetz})$$

Im Monat Oktober 1996 wurden vom Meteorologischen Amt Potsdam folgende Temperaturaufzeichnungen veröffentlicht. Am 1. Oktober um 2 Uhr Morgens betrug die Lufttemperatur -3° (Tagesminimum). Im Laufe des Tages erwärmte sich die Luft auf $+11^\circ$, gemessen um 14 Uhr.

Auf Grund der kürzeren Sonneneinstrahlung und des flacheren Einstrahlungswinkels fällt die durchschnittliche Tagestemperatur zum Ende des Monats um $\vartheta_e = 4^\circ$ ab.

Der Temperaturverlauf, gemessen über einen Tag, genüge einer Cosinusfunktion, wobei das Minimum stets um 2 Uhr Morgens und das Maximum stets um 14 Uhr Nachmittags liege.

In einem Meter unter der Erdoberfläche genüge die Funktion des Temperaturverlaufes $\vartheta(t)$ dem Newtonschen Abkühlungsgesetz, wobei $k = 0.1$ betrage.

1. Ermittle die Funktion der Lufttemperatur $\vartheta_A(t)$ im Monat Oktober.
2. Zeichne $\vartheta_A(t)$ für den 1. Oktober und 30. Oktober über je 24 h.
3. Ermittle den Temperaturverlauf $\vartheta(t)$ einen Meter unter der Erdoberfläche, wobei $\vartheta(t=0) = +2^\circ$ betrage.
4. Zeichne die Funktionen $\vartheta(t)$ und $\vartheta_A(t)$ in ein Diagramm für den 1. Oktober und für den 30. Oktober
5. Welche Aussagen können bezüglich der Gefahr von Bodenfrost in einem Meter Tiefe getroffen werden ?

Punktezahl=8

Ermittlung der Lufttemperatur $\vartheta_A(t)$

Als Zeitbasis sei $t = 0$ für den 1. Oktober um Mitternacht vereinbart. Bei einer Tageslänge von 24 h beträgt t damit zum Monatsende (nach $z = 30$ Tagen):

$$t_{end} = z \cdot 24h = 720h \quad (1)$$

Aus den Angaben der Aufgabenstellung ist bekannt das $\vartheta_A(t)$ einer Cosinusfunktion genügt. Da jeder Tag ein Temperaturminimum und ein Temperaturmaximum enthält, beträgt die Periodendauer:

$$p = \frac{2 \cdot \pi}{24} = \frac{\pi}{12} \quad (2)$$

Um das Maximum der Cosinusfunktion von 24 Uhr auf 14 Uhr zu verschieben ist ein Zeitversatz von 10 h nötig. Für den 1. Oktober beträgt $\vartheta_{max} = +11^\circ$ und $\vartheta_{min} = -3^\circ$. Die Tagesmitteltemperatur liegt bei

$$\vartheta_{m0} = \frac{\vartheta_{max} + \vartheta_{min}}{2} = +4^\circ \quad (3)$$

Die Temperaturkurve schwankt also um $4^\circ \pm 7^\circ$.

$$\vartheta_A(t) = \vartheta_{m0} + 7 \cdot \cos\left(\frac{(t+10) \cdot \pi}{12}\right) \quad (4)$$

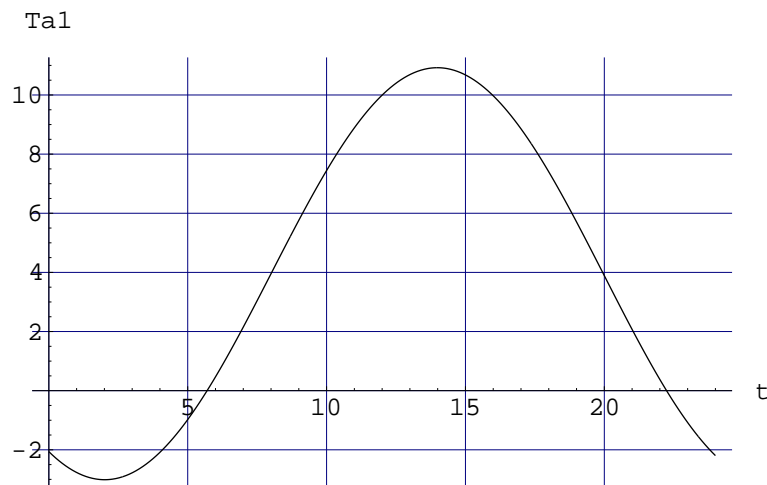


Abbildung 1: Temperaturverlauf am 1. Oktober

Nun muß noch die Abkühlung der Tagesmitteltemperatur über den Monat berücksichtigt werden. Es handelt sich dabei um eine linear abfallende Funktion:

$$\vartheta_m(t) = \vartheta_{m0} - \frac{t \cdot \vartheta_e}{24 \cdot 30} \quad (5)$$

Damit erhalten wir für den Monat Oktober als Außentemperatur die Funktion:

$$\vartheta_A(t) = \vartheta_{m0} - \frac{t \cdot \vartheta_e}{24 \cdot 30} + 7 \cdot \cos\left(\frac{(t+10) \cdot \pi}{12}\right) \quad (6)$$

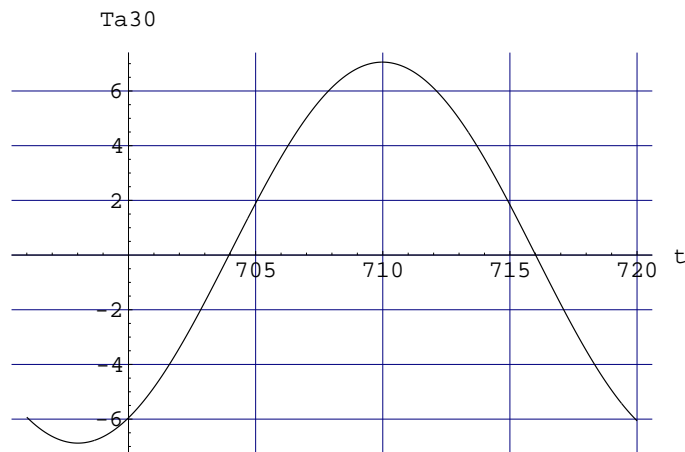


Abbildung 2: Temperaturverlauf am 30.Oktober

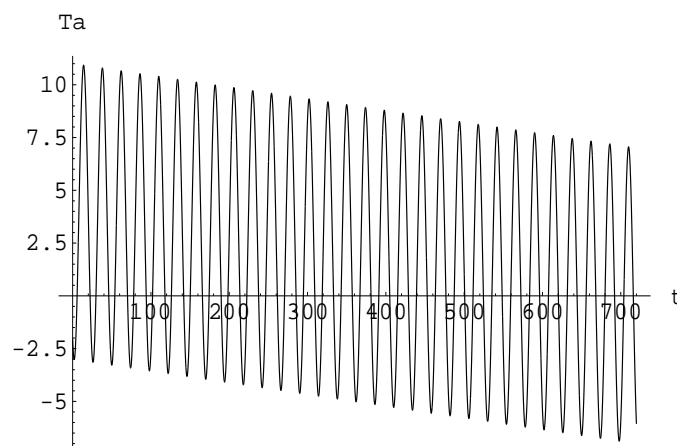


Abbildung 3: Temperaturverlauf über den gesamten Monat Oktober

Lösen der Temperatur-Differentialgleichung und graphische Auswertung

Das Newtonsche Abkühlungsgesetz lautet mit der oben ermittelten Funktion $\vartheta_A(t)$:

$$\dot{\vartheta}(t) = -k \left[\vartheta(t) - \vartheta_{m0} + \frac{t \cdot \vartheta_e}{24 \cdot 30} - 7 \cdot \cos \left(\frac{(t+10) \cdot \pi}{12} \right) \right], \quad AB : \vartheta(0) = +2^\circ \quad (7)$$

Die Lösung der linearen Differentialgleichung erbit in *Mathematica*:

$$\begin{aligned} \vartheta(t) = & \frac{1}{180k(144k^2 + \pi^2)} \\ & (e^{-kt}(12960(2 + 7\sqrt{3})k^3 - \pi^2 + 180k\pi^2 - 72k^2(2 + 105\pi)) - \\ & (144k^2 + \pi^2)(-1 + k(-720 + t)) + \\ & 7560k^2((- 12\sqrt{3}k + \pi) \cos \left[\frac{\pi t}{12} \right] - (12k + \sqrt{3}\pi) \sin \left[\frac{\pi t}{12} \right])) \end{aligned}$$

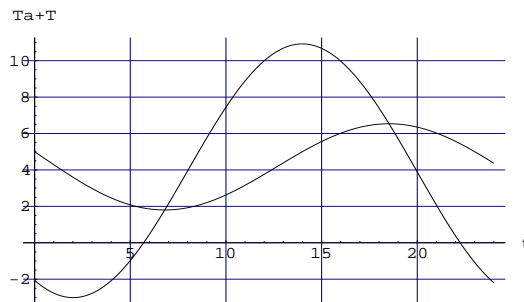


Abbildung 4: Lufttemperatur und Bodentemperatur am 1.Oktober

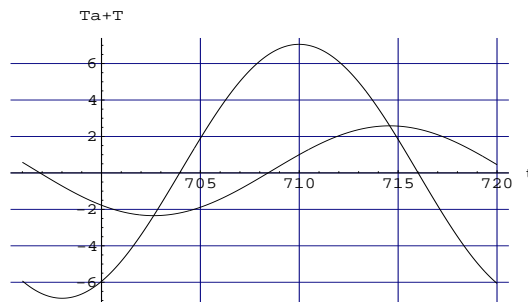


Abbildung 5: Lufttemperatur und Bodentemperatur am 30.Oktober