Gipfelstürmer

Eine Aufgabe von Ingmar Rubin, Berlin

11. April 2002

Frank und Thomas sind begeisterte Bergwanderer. Auf ihrer letzten Tour durch die Lienzer Dolomiten waren sie gezwungen einen längeren Aufenthalt in der *Karlsbader Hütte* , $2261\,m$ ü.NN zu suchen, da das Wetter plötzlich umgeschlagen war.
Doch *lange Weile* ist den Beiden ein Fremdwort. Frank und Thomas beschäftigen sich neben der Kletterei leidenschaftlich gerne mit dem Lösen mathematischer Probleme. Einen Zettelblock und Bleistift haben sie stets dabei. Frank möchte heute ein mathematisches Problem, das im Zusammenhang mit dem Aufstieg an Berghängen steht, lösen. Er schildert Thomas die Aufgabenstellung wie folgt:
Angenommen ein Berg habe idealisiert die Form eines geraden Kreiskegels mit der Gipfelhöhe h und dem Grundradius R. Am Bergrand windet sich ein Wanderweg stetig nach oben, wobei der Anstieg k stets konstant bleibt. Ein Wanderer beginnt den Aufstieg mit einer Geschwindigkeit v_0. Mit steigender Höhe z schwinden seine Kräfte, so das die Geschwindigkeit linear abfällt. Kurz vor erreichen des Gipfels beträgt seine Geschwindigkeit nur noch $v = \frac{v_0}{m}$ des anfänglichen Wertes $(1 \le m \le 100)$.
Wie berechnet man die Wegstrecke s vom Fußpunkt bis zum Gipfel und welche Zeit T benötigt man für den Aufstieg ?

Nach einer guten Stunde Rechnerei präsentiert Thomas eine simple Formel für den Weg s und die Zeit T, wobei der Radius des Kegels offensichtlich keine Rolle spielt. Das kann Frank kaum glauben. Zeigen Sie das Thomas mit seiner Rechnung die richtigen Formeln gefunden hat und lösen Sie die folgenden Teilaufgaben. (Punktezahl=12)

1. Auf welcher Kurve, in Parameterdarstellung, bewegt sich der Bergsteiger entlang des Berghanges, wenn der Anstieg k über den Weg stets konstant bleiben soll ?

2. Plotten Sie die Kurve im Maßstab $1 \div 100.000$ für die ersten 10 Windungen mit einem Programm Ihrer Wahl. Benutzen sie als numerische Werte $R = 2\,km$, $h = 4\,km$ und $k = 0.1$.

3. Berechnen Sie die Wegstrecke s vom Fußpunkt bis zum Gipfel in Abhängikeit von h und k.

4. Ermitteln Sie eine Formel für die Aufstiegszeit T. Berücksichtigen Sie dabei den linearen Geschwindigkeitsabfall in Abhängigkeit von der Höhe.

5. Plotten Sie die Kurve $T(m)$ für $h = 4\,km$, $k = 0.1$, $v_0 = 4\,km\,h^{-1}$ im
Intervall $1 \le m \le 100$. Welche Zeit benötigt der Bergsteiger für $m \to \infty$, d.h. die Endgeschwindigkeit am Gipfel beträgt $v = 0$?

Bestimmung der Bahnkurve

Die gesuchte Kurve läuft auf dem Mantel eines Kreiskegels. In Anlehnung an die Parameterdarstellung der *Schraubenlinie* verwenden wir Zylinderkoordinaten zur Beschreibung der Kurve. Der Mittelpunkt vom Grundkreis des Kegels befinde sich im Ursprung eines dreidimensionalen, kartesischen Koordinatensystems. Die $z-$ Achse laufe parallel mit der Höhenachse des Kegels.

$$x(\alpha) = r(\alpha)\,\cos\alpha, \quad y(\alpha) = r(\alpha)\,\sin\alpha, \quad z(\alpha) = f(\alpha) \tag{1}$$

Die Funktion $f(\alpha)$ bezeichnet dabei den Höhenanstieg in Abhängigkeit vom Drehwinkel α. Sie ist vorläufig noch unbekannt. Aus Abbildung 1 können wir die Funktion $r = r(\alpha)$ durch die Funktion $f(\alpha)$ ausdrücken :

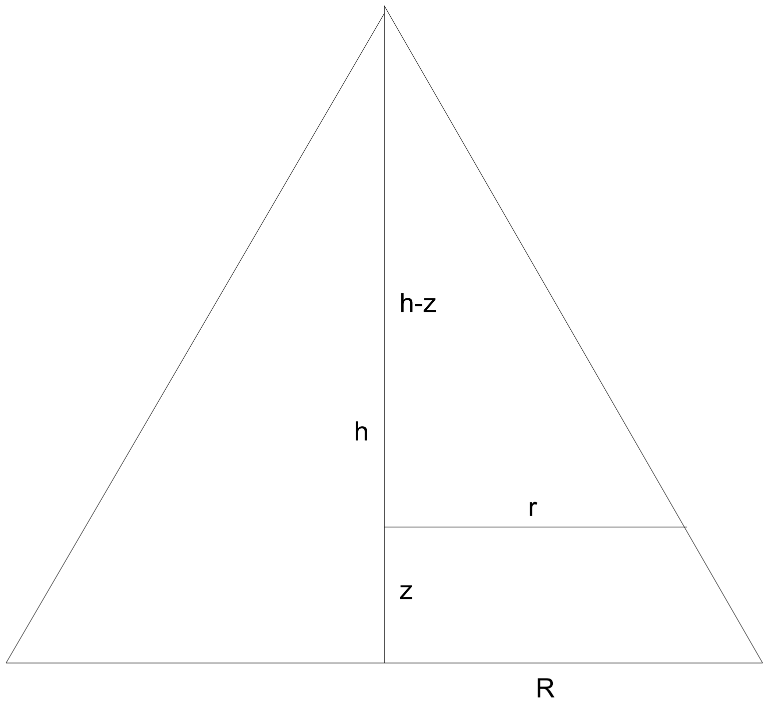

Abbildung 1: Querschnitt durch den Kreiskegel

$$\frac{h}{R} = \frac{h-z}{r} \quad \rightarrow \quad r(\alpha) = \frac{R\,(h-z)}{h} = \frac{R\,(h-f(\alpha))}{h} \tag{2}$$

In der Aufgabenstellung ist gefordet, dass der Anstieg konstant bleiben soll, also :

$$\frac{dz}{ds} = \frac{dz}{d\alpha}\left(\frac{ds}{d\alpha}\right)^{-1} = \sin\delta \tag{3}$$

Der Sinus des Anstiegswinkels δ steht mit dem Anstig k in folgender Beziehung :

$$k = \tan\delta \quad \rightarrow \quad \sin\delta = \frac{\tan\delta}{\sqrt{1+\tan\delta^2}} = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \tag{4}$$

Das Wegdifferential ds berechnet sich für Kurven in Paramterdarstellung aus :

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\alpha}\right)^2}\, d\alpha \tag{5}$$

Aus (1) berechnen wir die Ableitungen der Parametergleichungen und setzen sie in (4) ein:

$$ds = \frac{\sqrt{R^2\,(h - f[\alpha])^2 + \left(h^2 + R^2\right) f'(\alpha)^2}}{h}\, d\alpha \tag{6}$$

Schließlich erhalten wir mit (3) eine Differentialgleichung zur Bestimmung der unbekannten Funktion $f(\alpha)$:

$$\frac{dz}{ds} = \frac{h\, f'(\alpha)}{\sqrt{R^2\,(h - f[\alpha])^2 + \left(h^2 + R^2\right) f'(\alpha)^2}} = \frac{k}{\sqrt{1 + k^2}}, \qquad AB:\ f(0) = 0 \tag{7}$$

Die Lösung ergibt eine Exponentialfunktion für $f(\alpha)$

$$f(\alpha) = h \left(1 - \exp^{-\frac{k\,R\,\alpha}{\sqrt{h^2 - k^2\,R^2}}}\right) \tag{8}$$

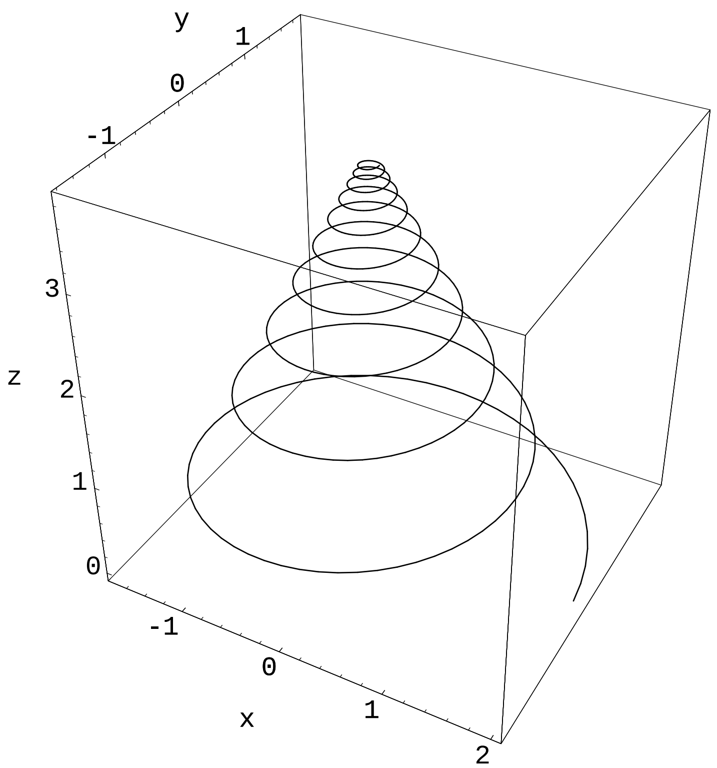

Abbildung 2: Lösungskurve mit konstanter Steigung $k = 0.1$

Berechnung der Wegstrecke bis zum Gipfel

Wir berechnen im ersten Schritt das bestimmte Integral über das Bogendifferential ds im Intervall von $0 \leq \alpha \leq \beta$, wobei β als variable Grenze fungiert.

$$ds = \exp^{-\frac{k\,R\,\alpha}{\sqrt{h^2 - k^2\,R^2}}}\,h\,R\,\sqrt{\frac{1+k^2}{h^2 - k^2\,R^2}} \tag{9}$$

$$s = h\,R\,\sqrt{\frac{1+k^2}{h^2 - k^2\,R^2}}\int_0^\beta \exp^{-\frac{k\,R\,\alpha}{\sqrt{h^2 - k^2\,R^2}}}\,d\alpha \tag{10}$$

$$s(\beta) = \frac{h\,\sqrt{1+k^2}}{k}\left(1 - \exp^{-\frac{k\,R\,\beta}{\sqrt{(h-k\,R)\,(h+k\,R)}}}\right) \tag{11}$$

Um den Weg S bis zur Kegelspitze zu berechnen, bilden wir den Grenzwert :

$$S = \lim_{\beta\to\infty} \frac{h\,\sqrt{1+k^2}}{k}\left(1 - e^{-\frac{k\,R\,\beta}{\sqrt{h^2 - k^2\,R^2}}}\right) = \frac{h\,\sqrt{1+k^2}}{k} = 40.2\,km \tag{12}$$

Damit ist der Weg unabhängig vom Radius des Kegels !

Berechnung der Zeit bis zum Aufstieg

Den linearen Geschwindigkeitsabfall bis zum Gipfel beschreiben wir mit Gleichung (11) :

$$v(z) = v_0\left(1 - \frac{(m-1)\,z}{m\,h}\right) \quad \to \quad v(z=h) = \frac{v_0}{m} \tag{13}$$

An Stelle von z schreiben wir die ermittelte Funktion $f(\alpha)$. Die Geschwindigkeit ist der Differentialquotient des Weges nach der Zeit :

$$\frac{ds}{dt} = v_0\left(1 - \frac{(m-1)\,f(\alpha)}{m\,h}\right) \quad \to \quad \int_0^t dt = \frac{1}{v_0}\int_{\alpha=0}^{\beta} \frac{ds}{\left(1 - \frac{(m-1)\,f(\alpha)}{m\,h}\right)} \tag{14}$$

Analog wie beim Weg s setzen wir als obere Integrationsgrenze den variablen Winkel β ein. Die bestimmte Integration führt uns auf :

$$T = \frac{h\,m\,\sqrt{\frac{1+k^2}{h^2-k^2\,R^2}}\left(k\,R\,\beta + \sqrt{h^2 - k^2\,R^2}\left(\log[m] - \ln\left[m - 1 + \exp^{\frac{k\,R\,\beta}{\sqrt{(h-k\,R)\,(h+k\,R)}}}\right]\right)\right)}{k\,(m-1)\,v_0}$$

Für großes β kann der Term $[m-1]$ gegenüber der Exponentialfunktion vernachlässigt werden:

$$\lim_{\beta\to\infty}\left(\ln\left[m - 1 + \exp^{\frac{k\,R\,\beta}{\sqrt{h^2-k^2\,R^2}}}\right]\right) = \frac{k\,R\,\beta}{\sqrt{h^2 - k^2\,R^2}} \tag{15}$$

Der Wurzelterm kürzt sich beim Ausmultiplizieren. Schließlich erhalten wir für die Zeit T die Formel:

$$T = \frac{m\,h\,\sqrt{1+k^2}\;\ln[m]}{k\,(m-1)\,v_0} \tag{16}$$

Somit ist auch die Zeit T bis zum Erreichen der Kegelspitze unabhängig vom Radius des Kegels.

Graph der Funktion $T(m)$

Abschließend wollen wir die Zeitdauer bis zum Erreichen des Gipfel in Abhängigkeit von m darstellen.

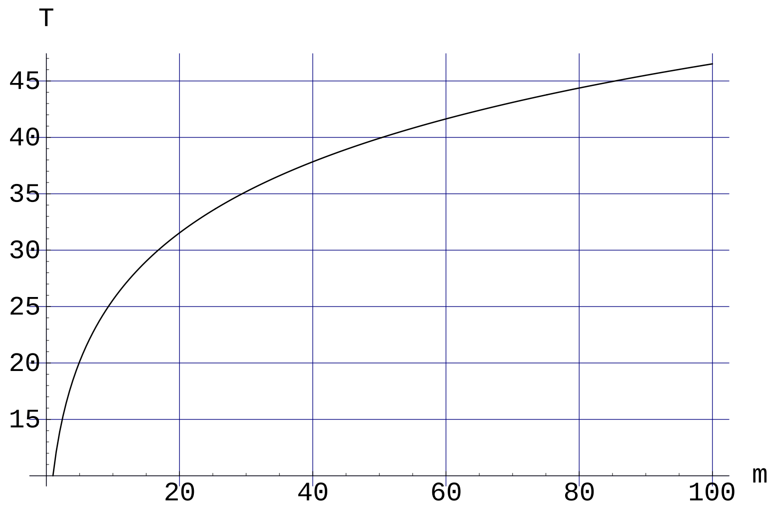

Abbildung 3: Mit steigendem m nimmt die Zeit T logarithmisch zu

Für $m = 1$ würde der Bergsteiger ohne Geschwindigkeitsverlust den Weg vom Fuß bis zum Gipfel zurücklegen :

$$m = 1: \qquad v(h) = v_0\left(1 - \frac{(m-1)\,h}{m\,h}\right) = v_0 = 4\,\frac{km}{h} \tag{17}$$

In der Formel für $T(m)$ ergibt sich bei $m = 1$ ein unbestimmter Ausdruck der Form $0 \div 0$ den wir mittels *L'hospital* lösen .

$$T(m=1) = \lim_{m\to 1}\left(\frac{m\,h\,\sqrt{1+k^2}\;\ln[m]}{k\,(m-1)\,v_0}\right) = \tag{18}$$

$$T(m=1) = \lim_{m\to 1}\left(\frac{h\,\sqrt{1+k^2}\;\ln[m] + h\,\sqrt{1+k^2}\,\frac{m}{m}}{k\,v_0}\right) = \frac{h\,\sqrt{1+k^2}}{k\,v_0} = 10.05\,h \tag{19}$$

Für $m = 2$ erhalten wir :

$$v(h) = \frac{v_0}{2}, \qquad T(m=2) = \frac{2\,h\,\sqrt{1+k^2}\,\ln[2]}{k\,(2-1)\,v_0} = 13.9321\,h \tag{20}$$

Für $m \to \infty$ strebt die Zeit T gegen unendlich, da die Logarithmusfunktion eine monoton steigende Funktion ist !

$$T(m \to \infty) = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{m\,h\,\sqrt{1+k^2}\,\ln[m]}{k\,(m-1)\,v_0} \right) = \frac{h\,\sqrt{1+k^2}\,\ln[\infty]}{k\;v_0} \to \infty \tag{21}$$

Berechnung der Wegstrecke s und Aufstiegszeit T
- nach einer Idee von Peter G.Nischke, Berlin

Wir denken uns einen Faden entlang der gesamten Wegstrecke gespannt. Wenn wir diesen Faden vom Kreikegel abwickeln erhalten wir die Strecke s als ansteigende Gerade in einer Ebene. Der Anstieg k und damit auch der Anstiegswinkel δ ist konstant. Am Ende der Wegstrecke s muß die Höhendifferenz h überwunden sein. Abbildung 2 verdeutlicht den Gedankengang.

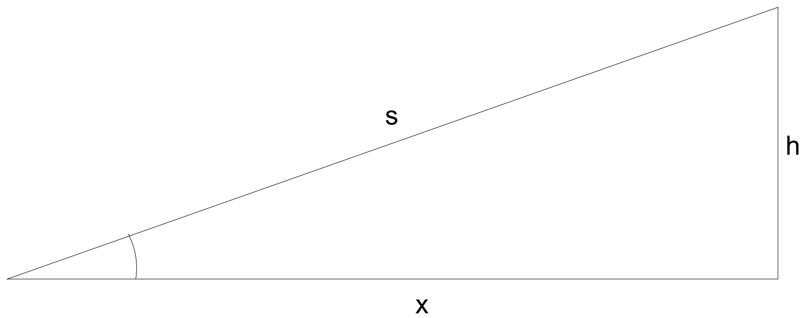

Abbildung 4: Fadenliene des abgewickelten Weges s

Aus den trigonometrischen Beziehung im rechtwinligen Dreieck folgt:

$$k = \tan\delta = \frac{h}{x}, \quad x = \frac{h}{k}, \quad s = \sqrt{x^2+h^2} = \frac{h}{k}\,\sqrt{1+k^2} \tag{22}$$

Damit ist der Weg bis zum Gipfel tatsächlich unabhängig vom Kegelradius. Mit den numerischen Werten aus der Aufgabe erhalten wir:

$$k = 0.1, \quad h = 4\,km \quad s = \frac{h}{k}\,\sqrt{1+k^2} = 40.2\,km \tag{23}$$

Die Zeit T bis zum Gipfel in Abhängikeit von k, m, v_0 und h können wir damit ebenfalls bestimmen. Wir bezeichnen die Höhenkoordinate mit z. Die Geschwindigkeit v in Abhängigkeit der der Höhe z erhalten wir aus :

$$v(z) = v_0 \left(1 - \frac{(m-1)\,z}{m\,h}\right) \quad \to \quad v(h) = \frac{v_0}{m} \tag{24}$$

Die Höhenkoordinate z steht in linearer Abhängigkeit von der $x-$ Koordinate (siehe Abbildung 4):

$$z(x) = k\,x \quad \to \quad v(x) = v_0 \left(1 - \frac{(m-1)\,k\,x}{m\,h}\right) \tag{25}$$

Für v schreiben wir jetzt den Differentialquotienten des Weges nach der Zeit :

$$\frac{ds}{dt} = v_0 \left(1 - \frac{(m-1)\,k\,x}{m\,h} \right) \tag{26}$$

Das Wegdifferential ds ersetzen wir durch dx :

$$z = k\,x, \quad ds = \sqrt{1 + z'^2} \cdot dx = \sqrt{1 + k^2} \cdot dx \tag{27}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{\sqrt{1 + k^2}} \left(1 - \frac{(m-1)\,k\,x}{m\,h} \right) \tag{28}$$

Schließlich werden beide Seiten der Gleichung integriert:

$$\int\limits_0^T dt = \frac{\sqrt{1+k^2}}{v_0} \int\limits_0^{x=\frac{h}{k}} \frac{dx}{\left(1 - \frac{(m-1)\,k\,x}{m\,h}\right)} \quad \rightarrow \quad T = \frac{m\,h\,\sqrt{1+k^2}\,\ln m}{v_0\,k\,(m-1)} \tag{29}$$