Von Schafen, Wölfen und Schlangen

aus dem Wettbewerb *Mathematik ohne Grenzen*

25. April 2005

In einem blühenden Tal leben Wölfe, Schafe und Schlangen.

- Jeden Morgen um 8 Uhr reißt jeder Wolf genau zwei Schafe.
- Jeden Mittag um 12 Uhr zertritt jedes Schaf genau zwei Schlangen, die faul in der Sonne liegen, und
- jeden Abend um 18 Uhr versetzt jede Schlange genau zwei Wölfen ihren tödlichen Biss.

Am Morgen des 6. Tages, um sechs Uhr, lebt schließlich nur noch ein einsamer Wolf an diesem paradiesischen Fleckchen Erde.

Wie viele Tiere von jeder Art bevölkerten das Tal am ersten Tag um sechs Uhr morgens?

Lösungsvorsachlag I

von Wolfgang Kirschenhofer, Österreich

Am i-ten Tag um 6:00 Uhr seien w_i, a_i, s_i die Zahl der Wölfe bzw. Schafe bzw. Schlangen. Die Zahl der Tiere am darauf folgenden $i+1$ ten Tag beträgt dann:

$$a_{i+1} = a_i - 2\,w_i \tag{1}$$

$$s_{i+1} = s_i - 2\,a_{i+1} = s_i - 2\,a_i + 4\,w_i \tag{2}$$

$$w_{i+1} = w_i - 2\,s_{i+1} = -7\,w_i - 2\,s_i + 4\,a_i \tag{3}$$

Für den Fall, dass die Zahl der Tiere am Tag 1 gegeben währe, könnten wir das Probelm mit den Differenzengleichungen (1) bis (3) schrittweise lösen. In der Aufgabenstellung ist jedoch die Zahl der Tiere am 6.Tag gegeben, d.h. wir müssen das lineare Gleichungssystem (1) .. (3) nach a_i, s_i und w_i auflösen:

$$a_i = a_{i+1} + 4\,s_{i+1} + 2\,w_{i+1} \tag{4}$$

$$s_i = 2\,a_{i+1} + s_{i+1} \tag{5}$$

$$w_i = w_{i+1} + 2\,s_{i+1} \tag{6}$$

Ausgehend von :

$$a_6 = 0, \quad s_6 = 0, \quad w_6 = 1 \tag{7}$$

erhält man dann schrittweise die Ergebnisse :

i	a_i	s_i	w_i
1	378	232	145
2	88	56	33
3	22	12	9
4	4	4	1
5	2	0	1
6	0	0	1

Lösungsvorsachlag II

von Reinhold Möbs, Karlsruhe

Der Übergang von einem Tag (morgens 6:00 Uhr) zum nächsten (6:00 Uhr) berechnet sich als

$$\begin{pmatrix} W_{n+1} \\ SF_{n+1} \\ SL_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} W_n \\ SF_n \\ SL_n \end{pmatrix} \tag{8}$$

Dabei hat die Übergangsmatrix die Determinante 1, ist also Elememnt der Gruppe der 3×3 Matrizen mit ganzzahligen Koeffizienten und der Determinante 1. Deren Inverse ist

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Wenn ich also 5 Übergänge (6 Tage) habe, so berechnet sich der *Ausgangszustand* (W_A, SF_A, SL_A) aus dem *Endzustand* (W_E, SF_E, SL_E) gemäß:

$$\begin{pmatrix} W_A \\ SF_A \\ SL_A \end{pmatrix} = M^5 \begin{pmatrix} W_E \\ SF_E \\ SL_E \end{pmatrix} \tag{10}$$

Dabei beträgt:

$$M^5 = \begin{pmatrix} 145 & 232 & 378 \\ 378 & 609 & 988 \\ 232 & 378 & 609 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Für eine gegebene Dauer von N Tagen berechnet sich dann allgemein der Ausgangszustand zu:

$$\begin{pmatrix} W_A \\ SF_A \\ SL_A \end{pmatrix} = M^{(N-1)} \begin{pmatrix} W_E \\ SF_E \\ SL_E \end{pmatrix} \tag{12}$$