Korrespondenzzirkel Sachsen-Anhalt

Aufgabenserie 12 *Termin: 25. November 2001*

Themenblatt: Geometrie am Kreis

Lösungen

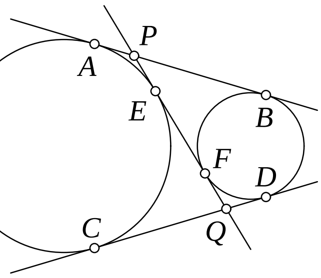
Die **Aufgabe 1** wird wohl jeder für sich selbst gelöst haben.

Aufgabe 2 bestätigt man durch einfaches Ausrechnen:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad\Longrightarrow\quad ad = bc \quad\Longrightarrow\quad ad + ab = bc + ab \quad\Longrightarrow\quad a(b+d) = b(a+c) \quad\Longrightarrow\quad \frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d},$$

ebenso die umgekehrte Richtung sowie das Ganze einschließlich e und f.

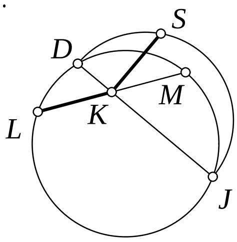
Aufgabe 3. *Beweis:* (Bild) Die Berührungspunkte der äußeren Tangenten mit den Kreisen seien A, B, C und D. Aufgrund gleicher Tangentenabschnitte gilt:



$$AB = AP + PB = PE + PF = PE + (PE + EF),$$
$$DC = DQ + QC = QF + QE = QF + (QF + EF).$$

Wegen $AB = DC$ folgt daraus wie behauptet $PE = QF$. □

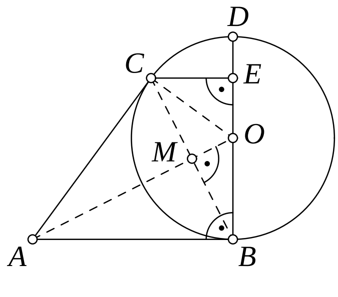
Aufgabe 4. *Beweis:* (Bild) Folgende Gleichungskette läßt sich unmittelbar aufstellen:



$$KL^2 = KL \cdot KM = DK \cdot KJ \text{ (Sehnensatz)}$$
$$= KS^2 \text{ (Höhensatz).}$$

Durch Wurzelziehen folgt die Behauptung. □

Aufgabe 5. *Beweis:* (Bild) a) Betrachten wir die behauptete Gleichung genauer, fällt auf, daß AB und BO Katheten des rechtwinkligen Dreiecks ABO sowie BE und CE diejenigen von $\triangle BEC$ sind. Könnten wir die Ähnlichkeit beider Dreiecke nachweisen, wäre der Beweis schon erbracht. Zeichnen wir dazu die Strecken AO, CO und BC in unsere Planfigur ein und nennen $M \equiv AO \cap BC$, dann ist wegen $AB = AC$ (gleiche Tangentenabschnitte), $BO = CO$ (gleiche Radien) und $\measuredangle ABO = \measuredangle ACO = 90°$: $\triangle ABO \cong \triangle ACO$, und AO ist Mittelsenkrechte von BC. Die rechtwinkligen Dreiecke ABO und BMO haben den Winkel bei O gemeinsam; demzufolge ist



$$\measuredangle BAO = \measuredangle MBO = \measuredangle CBE.$$

Daraus folgt $\triangle ABO \sim \triangle BEC$, also

$$\frac{AB}{BO} = \frac{BE}{CE} \qquad \text{oder} \qquad BE \cdot BO = AB \cdot CE. \qquad (1)$$

b) Aus dem Höhensatz folgt $CE = \sqrt{BE} \cdot \sqrt{ED}$. Dies in die erste Gleichung in (1) eingesetzt und beide Seiten mit $\frac{BO}{\sqrt{BE}}$ multipliziert, ergibt die zweite Gleichung. □

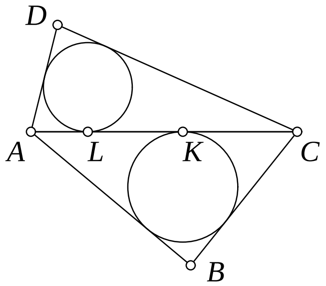
Aufgabe 6. Wir beweisen zunächst folgenden Hilfssatz:
$ABCD$ sei ein beliebiges konvexes Viereck. Die Inkreise der Dreiecke ABC und CDA mögen die Diagonale AC in den Punkten K bzw. L berühren. Dann gilt für den Abstand dieser beiden Punkte:

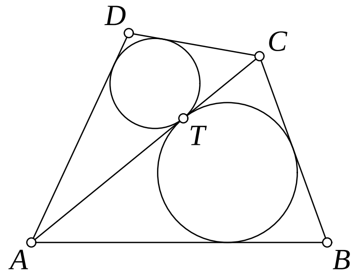
$$KL = \frac{1}{2}|(AB + CD) - (BC + DA)|.$$

Beweis: (Bild links) Für die Tangentenabschnitte AK und AL finden wir leicht folgende Ausdrücke:

$$AK = \frac{1}{2}(AB + AC - BC), \quad AL = \frac{1}{2}(AC + DA - CD),$$

deren Subtraktion unmittelbar die behauptete Gleichung liefert. □





Nun der eigentliche *Beweis:* (Bild rechts) Wegen der Beziehung $AB + CD - BC - DA = 0$ für Tangentenvierecke fallen die Berührungspunkte der Inkreise auf der Diagonalen AC gerade zusammen. □

Aufgabe 7. *Beweis:* (Bild) Der Schnittpunkt der Geraden OC mit der Sehne DE sei F. Dann ist

$$\measuredangle FEC + \measuredangle ECF = \measuredangle CBA + \measuredangle ACO$$

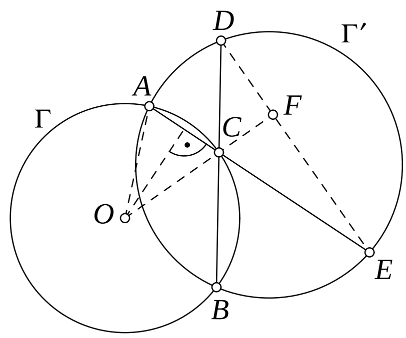
(Peripheriewinkel über AD und Scheitelwinkel bei C)

$$= \frac{1}{2}\measuredangle COA + \measuredangle ACO$$

(Peripherie-Zentriwinkel-Satz)

$$= 90^\circ$$

(Winkelhalbierende ist gleichzeitig Höhe auf AC im gleichschenkligen $\triangle AOC$).



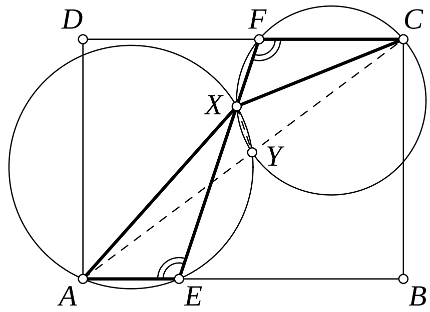
Somit ist $\measuredangle CFE = 90^\circ$ oder $DE \perp OC$. □

Aufgabe 8. *Beweis:* (Bild) Nennen wir den zweiten Schnittpunkt der genannten Umkreise Y. Es genügt nun offensichtlich zu zeigen, daß A, Y und C gemeinsam auf einer Geraden liegen, mithin $\measuredangle AYC$ ein Gestreckter ist. Letzterer ist die Summe aus $\measuredangle AYX$ und $\measuredangle CYX$. $AEYX$ ist ein Sehnenviereck, in dem

$$\measuredangle AYX = \measuredangle AEX$$

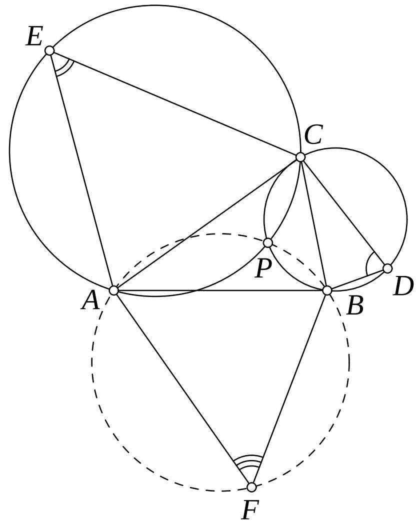
gilt. Im Sehnenviereck $CFXY$ finden wir dagegen

$$\measuredangle CYX = 180^\circ - \measuredangle CFX.$$



Beides addiert liefert unter Beachtung von $\measuredangle AEX = \measuredangle CFX$ (Wechselwinkel) die Behauptung. □

Aufgabe 9. *Beweis:* (Bild) Die Aufsatzdreiecke seien BCD, CAE und ABF, wobei nach Voraussetzung die Winkel $\overline{D}$, $\overline{E}$ und $\overline{F}$ an den „entfernten" Eckpunkten die Gleichung $\overline{D}+\overline{E}+\overline{F}=180°$ erfüllen. Die Kreise BCD und CAE mögen sich (außer in C noch) im Punkt P schneiden. Verbinden wir P mit A, B und C, so gilt nach dem Peripheriewinkelsatz



$$\measuredangle BPC = 180° - \overline{D}, \quad \measuredangle CPA = 180° - \overline{E},$$

also

$$\begin{aligned}\measuredangle APB &= 360° - \measuredangle BPC - \measuredangle CPA \\ &= 360° - (180° - \overline{D}) - (180° - \overline{E}) \\ &= \overline{D} + \overline{E} = 180° - \overline{F}.\end{aligned}$$

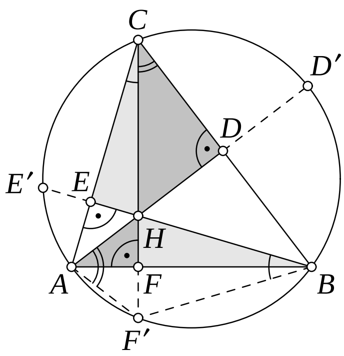
Nach der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes liegt P damit auf dem Umkreis ABF ebenso wie auf den Umkreisen BCD und CAE. □

Bemerkung: Liegen die Punkte A, B und C gerade auf den Seiten eines Dreiecks DEF, ist dieser Satz auch als **Satz von Miquel** bekannt.

Aufgabe 10. Der zu beweisende Satz bereitet keine Mühe, wenn wir folgenden Satz kennen:

Spiegelt man in einem spitzwinkligen Dreieck den Höhenschnittpunkt an den Seiten, so liegen die Bildpunkte auf dem Umkreis des Dreiecks.

Beweis: (Bild) Die Höhenfußpunkte seien D, E, F, die gespiegelten Punkte entsprechend D', E', F'. Es genügt nachzuweisen, daß



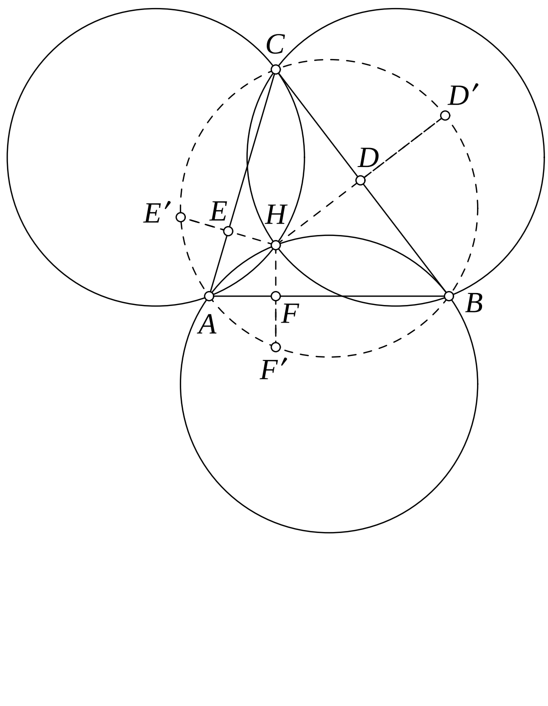
$$\measuredangle ACB + \measuredangle AF'B = 180°$$

gilt (Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes). Offenbar sind AFH und CDH ähnliche Dreiecke (Scheitelwinkel und Rechter), ebenso ist $\triangle BFH \sim \triangle CEH$. Außerdem ist wegen $HF = FF'$ und $AB \perp HF'$ das Viereck $AF'BH$ ein Drachenviereck. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}\measuredangle ACB &= \measuredangle ECH + \measuredangle DCH = \measuredangle FBH + \measuredangle FAH \\ &= \measuredangle FBF' + \measuredangle FAF' = 180° - \measuredangle AF'B.\end{aligned}$$

Analog für die Punkte D' bzw. E'. □

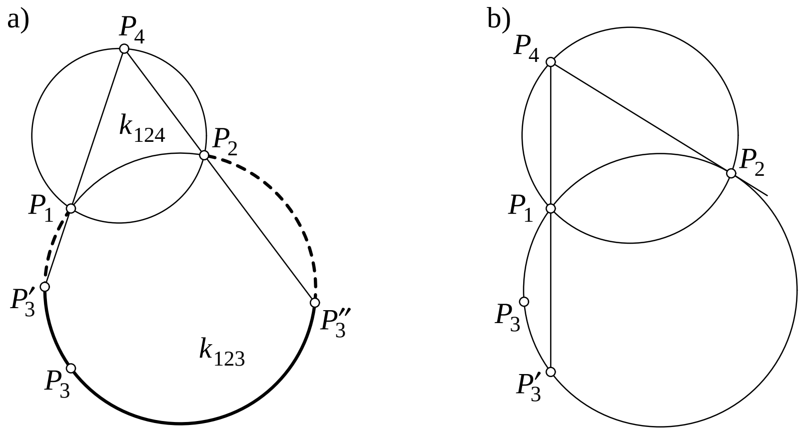
Nun zum eigentlichen *Beweis:* Mit der Spiegelung erzeugen wir offensichtlich drei Paare kongruenter Dreiecke, nämlich



$$\triangle HBC \cong \triangle D'BC, \quad \triangle HCA \cong \triangle E'CA,$$
$$\triangle HAB \cong \triangle F'AB.$$

Die Umkreise der rechts stehenden Dreiecke fallen also mit dem Umkreis von $\triangle ABC$ zusammen, und – da kongruente Dreiecke gleiche Umkreise haben – sind die Umkreise der links stehenden Dreiecke ebenso groß. □

Aufgabe 11. *Beweis:* (Bild) Wir zeichnen durch die Punkte P_1, P_2, P_3 und P_1, P_2, P_4 jeweils einen Kreis k_{123} bzw. k_{124}. Wenn der Punkt P_4 in dem Kreis k_{123} liegt, ist mit der Bezeichnung $Q_i \equiv P_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ die gestellte Frage zu bejahen, ebenso, wenn der Punkt P_3 in dem Kreis k_{124} liegt; in diesem Fall bezeichnen wir $Q_i \equiv P_i$, $i = 1, 2$ sowie $Q_3 \equiv P_4$ und $Q_4 \equiv P_3$. Wir wollen daher im weiteren



annehmen, daß keiner der beiden Fälle vorliege. Wie leicht zu erkennen ist, zerfällt dann der außerhalb des Kreises k_{124} liegende Bogen des Kreises k_{123} in drei Teile: $P_1P'_3$, $P'_3P''_3$, P''_3P_2 (Bild a); wenn dabei der Punkt P_3 auf $P_1P'_3$ liegt, so liegt der Punkt $Q_4 \equiv P_1$ in dem Kreis k_{234}; wenn der Punkt P_3 auf P''_3P_2 liegt, so liegt der Punkt $Q_4 \equiv P_2$ im Kreis k_{134}; wenn der Punkt P_3 auf $P'_3P''_3$ liegt, befindet sich $Q_4 \equiv P_1$ innerhalb von k_{234} *und* $Q_4 \equiv P_2$ innerhalb von k_{134}. Falls eins oder zwei von den drei oben genannten Teilbögen verschwinden (etwa wenn P_4P_2 gerade eine Tangente an k_{123} ist, Bild b), ist die Antwort auch hierbei stets bejahend. $\square$

ANDERE Aufgabe: Einem Dreieck entsprechen eineindeutig dessen drei Seiten, diesen wiederum eineindeutig sechs Punkte auf dem Kreis, also gibt es genau $\binom{n}{6}$ Dreiecke.