

# Korrespondenzkreis Sachsen-Anhalt

Aufgabenserie 12

Termin: 25. November 2001

## Themenblatt: Geometrie am Kreis Lösungen

Die **Aufgabe 1** wird wohl jeder für sich selbst gelöst haben.

**Aufgabe 2** bestätigt man durch einfaches Ausrechnen:

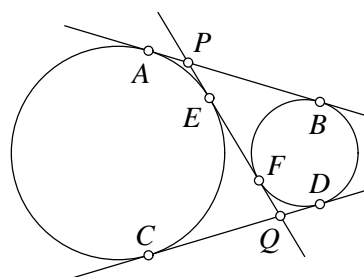
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \implies ad = bc \implies ad + ab = bc + ab \implies a(b+d) = b(a+c) \implies \frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d},$$

ebenso die umgekehrte Richtung sowie das Ganze einschließlich  $e$  und  $f$ .

**Aufgabe 3. Beweis:** (Bild) Die Berührungspunkte der äußeren Tangenten mit den Kreisen seien  $A, B, C$  und  $D$ . Aufgrund gleicher Tangentenabschnitte gilt:

$$\begin{aligned} AB &= AP + PB = PE + PF = PE + (PE + EF), \\ DC &= DQ + QC = QF + QE = QF + (QF + EF). \end{aligned}$$

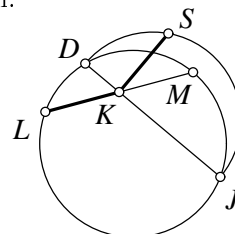
Wegen  $AB = DC$  folgt daraus wie behauptet  $PE = QF$ .  $\square$



**Aufgabe 4. Beweis:** (Bild) Folgende Gleichungskette läßt sich unmittelbar aufstellen:

$$\begin{aligned} KL^2 &= KL \cdot KM = DK \cdot KJ \quad (\text{Sehnensatz}) \\ &= KS^2 \quad (\text{Höhensatz}). \end{aligned}$$

Durch Wurzelziehen folgt die Behauptung.  $\square$

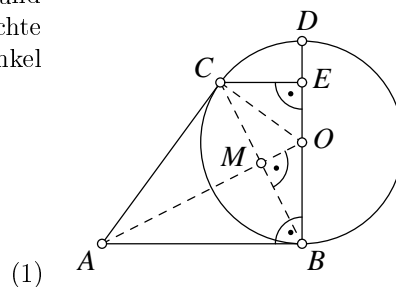


**Aufgabe 5. Beweis:** (Bild) a) Betrachten wir die behauptete Gleichung genauer, fällt auf, daß  $AB$  und  $BO$  Katheten des rechtwinkligen Dreiecks  $ABO$  sowie  $BE$  und  $CE$  diejenigen von  $\triangle BEC$  sind. Könnten wir die Ähnlichkeit beider Dreiecke nachweisen, wäre der Beweis schon erbracht. Zeichnen wir dazu die Strecken  $AO, CO$  und  $BC$  in unsere Planfigur ein und nennen  $M \equiv AO \cap BC$ , dann ist wegen  $AB = AC$  (gleiche Tangentenabschnitte),  $BO = CO$  (gleiche Radien) und  $\angle ABO = \angle ACO = 90^\circ$ :  $\triangle ABO \cong \triangle ACO$ , und  $AO$  ist Mittelsenkrechte von  $BC$ . Die rechtwinkligen Dreiecke  $ABO$  und  $BMO$  haben den Winkel bei  $O$  gemeinsam; demzufolge ist

$$\angle BAO = \angle MBO = \angle CBE.$$

Daraus folgt  $\triangle ABO \sim \triangle BEC$ , also

$$\frac{AB}{BO} = \frac{BE}{CE} \quad \text{oder} \quad BE \cdot BO = AB \cdot CE. \quad (1)$$



b) Aus dem Höhensatz folgt  $CE = \sqrt{BE} \cdot \sqrt{ED}$ . Dies in die erste Gleichung in (1) eingesetzt und beide Seiten mit  $\frac{BO}{\sqrt{BE}}$  multipliziert, ergibt die zweite Gleichung.  $\square$

**Aufgabe 6.** Wir beweisen zunächst folgenden Hilfssatz:

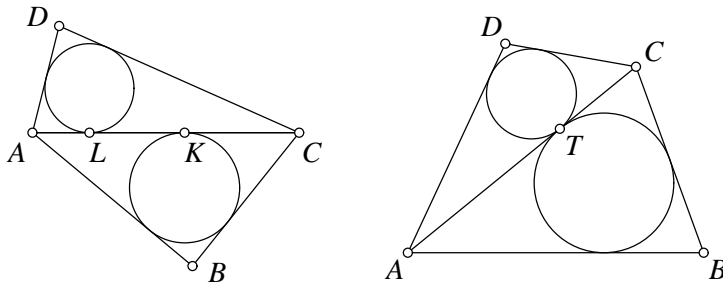
$ABCD$  sei ein beliebiges konvexes Viereck. Die Inkreise der Dreiecke  $ABC$  und  $CDA$  mögen die Diagonale  $AC$  in den Punkten  $K$  bzw.  $L$  berühren. Dann gilt für den Abstand dieser beiden Punkte:

$$KL = \frac{1}{2} |(AB + CD) - (BC + DA)|.$$

*Beweis:* (Bild links) Für die Tangentenabschnitte  $AK$  und  $AL$  finden wir leicht folgende Ausdrücke:

$$AK = \frac{1}{2} (AB + AC - BC), \quad AL = \frac{1}{2} (AC + DA - CD),$$

deren Subtraktion unmittelbar die behauptete Gleichung liefert.  $\square$

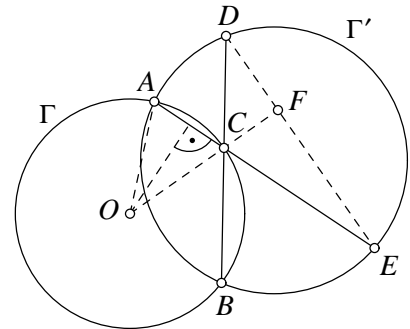


Nun der eigentliche *Beweis:* (Bild rechts) Wegen der Beziehung  $AB + CD - BC - DA = 0$  für Tangentenvierecke fallen die Berührungspunkte der Inkreise auf der Diagonalen  $AC$  gerade zusammen.  $\square$

**Aufgabe 7.** *Beweis:* (Bild) Der Schnittpunkt der Geraden  $OC$  mit der Sehne  $DE$  sei  $F$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \angle FEC + \angle ECF &= \angle CBA + \angle ACO \\ (\text{Peripheriewinkel über } AD \text{ und Scheitelwinkel bei } C) & \\ &= \frac{1}{2} \angle COA + \angle ACO \\ (\text{Peripherie-Zentriwinkel-Satz}) & \\ &= 90^\circ \end{aligned}$$

(Winkelhalbierende ist gleichzeitig Höhe auf  $AC$  im gleichschenkligen  $\triangle AOC$ ).



Somit ist  $\angle CFE = 90^\circ$  oder  $DE \perp OC$ .  $\square$

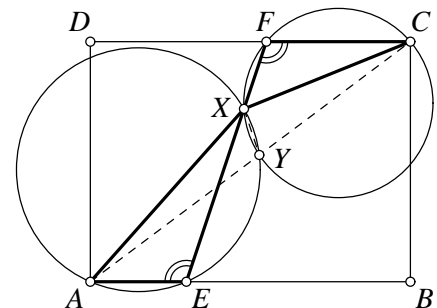
**Aufgabe 8.** *Beweis:* (Bild) Nennen wir den zweiten Schnittpunkt der genannten Umkreise  $Y$ . Es genügt nun offensichtlich zu zeigen, daß  $A$ ,  $Y$  und  $C$  gemeinsam auf einer Geraden liegen, mithin  $\angle AYC$  ein Gestreckter ist. Letzterer ist die Summe aus  $\angle AYX$  und  $\angle CYX$ .  $AEYX$  ist ein Sehnenviereck, in dem

$$\angle AYX = \angle AEX$$

gilt. Im Sehnenviereck  $CFXY$  finden wir dagegen

$$\angle CYX = 180^\circ - \angle CFX.$$

Beides addiert liefert unter Beachtung von  $\angle AEX = \angle CFX$  (Wechselwinkel) die Behauptung.  $\square$



**Aufgabe 9.** *Beweis:* (Bild) Die Aufsatzdreiecke seien  $BCD$ ,  $CAE$  und  $ABF$ , wobei nach Voraussetzung die Winkel  $\overline{D}$ ,  $\overline{E}$  und  $\overline{F}$  an den „entfernten“ Eckpunkten die Gleichung  $\overline{D} + \overline{E} + \overline{F} = 180^\circ$  erfüllen. Die Kreise  $BCD$  und  $CAE$  mögen sich (außer in  $C$  noch) im Punkt  $P$  schneiden. Verbinden wir  $P$  mit  $A$ ,  $B$  und  $C$ , so gilt nach dem Peripheriewinkelsatz

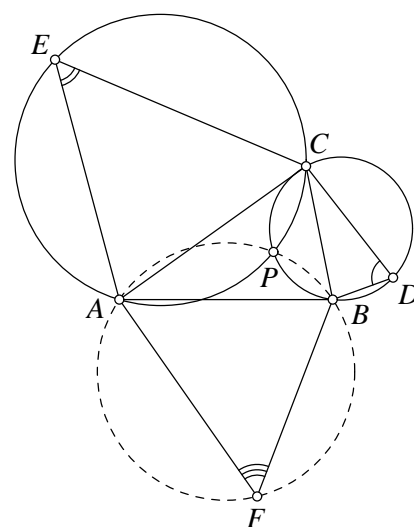
$$\angle BPC = 180^\circ - \overline{D}, \quad \angle CPA = 180^\circ - \overline{E},$$

also

$$\begin{aligned} \angle APB &= 360^\circ - \angle BPC - \angle CPA \\ &= 360^\circ - (180^\circ - \overline{D}) - (180^\circ - \overline{E}) \\ &= \overline{D} + \overline{E} = 180^\circ - \overline{F}. \end{aligned}$$

Nach der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes liegt  $P$  damit auf dem Umkreis  $ABF$  ebenso wie auf den Umkreisen  $BCD$  und  $CAE$ .  $\square$

*Bemerkung:* Liegen die Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  gerade auf den Seiten eines Dreiecks  $DEF$ , ist dieser Satz auch als **Satz von Miquel** bekannt.



**Aufgabe 10.** Der zu beweisende Satz bereitet keine Mühe, wenn wir folgenden Satz kennen:

*Spiegelt man in einem spitzwinkligen Dreieck den Höhenschnittpunkt an den Seiten, so liegen die Bildpunkte auf dem Umkreis des Dreiecks.*

*Beweis:* (Bild) Die Höhenfußpunkte seien  $D$ ,  $E$ ,  $F$ , die gespiegelten Punkte entsprechend  $D'$ ,  $E'$ ,  $F'$ . Es genügt nachzuweisen, daß

$$\angle ACB + \angle AF'B = 180^\circ$$

gilt (Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes). Offenbar sind  $AFH$  und  $CDH$  ähnliche Dreiecke (Scheitelwinkel und Rechter), ebenso ist  $\triangle BFH \sim \triangle CEH$ . Außerdem ist wegen  $HF = FF'$  und  $AB \perp HF'$  das Viereck  $AF'BH$  ein Drachenviereck. Somit ergibt sich

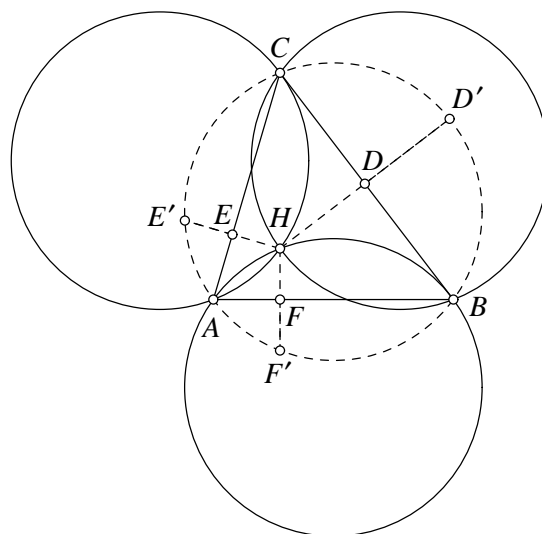
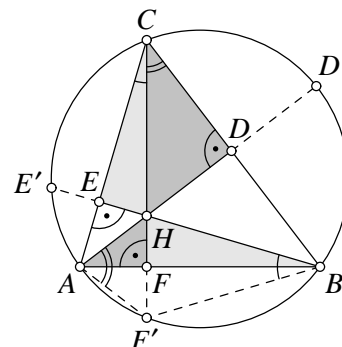
$$\begin{aligned} \angle ACB &= \angle ECH + \angle DCH = \angle FBH + \angle FAH \\ &= \angle FBF' + \angle FAF' = 180^\circ - \angle AF'B. \end{aligned}$$

Analog für die Punkte  $D'$  bzw.  $E'$ .  $\square$

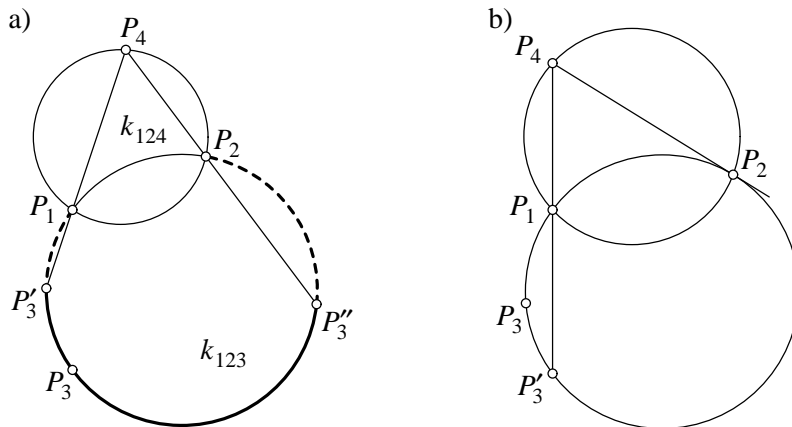
Nun zum eigentlichen *Beweis*: Mit der Spiegelung erzeugen wir offensichtlich drei Paare kongruenter Dreiecke, nämlich

$$\begin{aligned} \triangle HBC &\cong \triangle D'BC, & \triangle HCA &\cong \triangle E'CA, \\ \triangle HAB &\cong \triangle F'AB. \end{aligned}$$

Die Umkreise der rechts stehenden Dreiecke fallen also mit dem Umkreis von  $\triangle ABC$  zusammen, und – da kongruente Dreiecke gleiche Umkreise haben – sind die Umkreise der links stehenden Dreiecke ebenso groß.  $\square$



**Aufgabe 11.** *Beweis:* (Bild) Wir zeichnen durch die Punkte  $P_1, P_2, P_3$  und  $P_1, P_2, P_4$  jeweils einen Kreis  $k_{123}$  bzw.  $k_{124}$ . Wenn der Punkt  $P_4$  in dem Kreis  $k_{123}$  liegt, ist mit der Bezeichnung  $Q_i \equiv P_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  die gestellte Frage zu bejahen, ebenso, wenn der Punkt  $P_3$  in dem Kreis  $k_{124}$  liegt; in diesem Fall bezeichnen wir  $Q_i \equiv P_i$ ,  $i = 1, 2$  sowie  $Q_3 \equiv P_4$  und  $Q_4 \equiv P_3$ . Wir wollen daher im weiteren



annehmen, daß keiner der beiden Fälle vorliege. Wie leicht zu erkennen ist, zerfällt dann der außerhalb des Kreises  $k_{124}$  liegende Bogen des Kreises  $k_{123}$  in drei Teile:  $P_1P'_3$ ,  $P'_3P''_3$ ,  $P''_3P_2$  (Bild a); wenn dabei der Punkt  $P_3$  auf  $P_1P'_3$  liegt, so liegt der Punkt  $Q_4 \equiv P_1$  in dem Kreis  $k_{234}$ ; wenn der Punkt  $P_3$  auf  $P''_3P_2$  liegt, so liegt der Punkt  $Q_4 \equiv P_2$  im Kreis  $k_{134}$ ; wenn der Punkt  $P_3$  auf  $P'_3P''_3$  liegt, befindet sich  $Q_4 \equiv P_1$  innerhalb von  $k_{234}$  und  $Q_4 \equiv P_2$  innerhalb von  $k_{134}$ . Falls eins oder zwei von den drei oben genannten Teilbögen verschwinden (etwa wenn  $P_4P_2$  gerade eine Tangente an  $k_{123}$  ist, Bild b), ist die Antwort auch hierbei stets bejahend.  $\square$

**ANDERE Aufgabe:** Einem Dreieck entsprechen eineindeutig dessen drei Seiten, diesen wiederum eineindeutig sechs Punkte auf dem Kreis, also gibt es genau  $\binom{n}{6}$  Dreiecke.