Korrespondenzzirkel Sachsen-Anhalt

Aufgabenserie 12 ***Termin: 25. November 2001***

Themenblatt: Geometrie am Kreis*

Klasse 9/10 und 11–13

Einleitung

Obwohl schon jedes Vorschulkind weiß, was ein Kreis ist und wie er aussieht, verblüfft es einen im Laufe der Zeit immer mehr, wie viele Dinge an solch simplen geometrischen Gebilden wie einem Kreis ungeheuer kompliziert sein können. Nehmen wir z. B. besondere Punkte: Von Hause aus ist ja nur ein Punkt besonders ausgezeichnet, sein *Mittelpunkt*, und wir können bestenfalls noch innere, äußere und auf seiner Peripherie liegende Punkte unterscheiden. Nehmen wir aber z. B. noch von einem außerhalb des Kreises liegenden Punkt ausgehende Strahlen hinzu, dann können diese den Kreis entweder schneiden (*Sekanten*), gerade berühren oder tangieren (*Tangenten*) oder „verfehlen" (*Passanten*). Im ersten Fall entstehen zwei Schnittpunkte mit dem Kreis, die bekanntlich die Enden einer *Sehne* sind, im zweiten der Berührungspunkt und im dritten Fall gibt es einen Punkt auf dem Strahl, der einen minimalen Abstand zum Kreis und damit zu dessen Mittelpunkt hat. Treten noch weitere Punkte, Geraden oder Kreise hinzu, können wir überaus zahlreiche Beziehungen zwischen Winkeln, Längen oder Flächeninhalten entdecken, die letztendlich den Stoff ausmachen, von dem Mathematik-Wettbewerbe leben.

Das grundlegende Problem, das sich einem „Erfinder" eines solchen Themenblattes stellt, ist: Wo fange ich mit den Grundlagen an? Was setze ich als bekannt voraus? Antwort: Natürlich nicht beim Urschleim! Also müssen wir ganz einfach bestimmte Sätze aus der Elementargeometrie als anwendungsbereites Wissen voraussetzen (egal, ob dieses aus dem Schulunterricht bekannt ist oder nicht), um darauf aufbauend die am Ende des Themenblattes gestellten Aufgaben auch erfolgreich lösen zu können. Der nächste Abschnitt beschreibt in etwa dieses Rüstzeug.

Grundlagen

Beginnen wir mit einigen Sätzen über Winkel, auf deren Beweise an dieser Stelle verzichtet wird, da sie eigentlich Schulstoff sind. Wer dennoch hierzu etwas erfahren will, dem sei `www.math4u.de`, Kapitel K (Kreis), empfohlen.

Peripheriewinkelsatz. *Alle Peripheriewinkel über demselben Kreisbogen sind einander gleich.*

Peripherie-Zentriwinkel-Satz. *Die über einem Bogen und einer Sehne liegenden Peripheriewinkel eines Kreises sind untereinander gleich und halb so groß wie der zugehörige Zentriwinkel; Peripheriewinkel, die auf verschiedenen Seiten derselben Sehne liegen, ergänzen sich zu* $180°$.

Satz des Thales. *Verbindet man einen Punkt der Peripherie eines Kreises mit den Endpunkten eines beliebigen Durchmessers, so stehen die Verbindungslinien senkrecht aufeinander.*

Sehnen-Tangentenwinkel-Satz. *Ein Sehnen-Tangentenwinkel hat stets die gleiche Größe wie jeder Peripheriewinkel über dem Kreisbogen, der zwischen den Schenkeln des Sehnen-Tangentenwinkels liegt.*

Darüber hinaus gibt es Sätze, die Aussagen über bestimmte Längenrelationen zwischen Sehnen, Sekanten bzw. Tangenten am Kreis machen. Im folgenden auch nur eine kurze Übersicht:

Sehnensatz. *Schneiden sich in einem Kreis zwei Sehnen, so ist das Produkt der Abschnittslängen der einen Sehne gleich dem Produkt der Abschnittslängen der anderen.*

*Diese Einschränkung ist hier nicht ganz wörtlich zu nehmen, denn es gelingt eigentlich nicht, etwa andere geometrische Gebilde wie z. B. Dreiecke ganz heraus zu halten.

Sekantensatz. *Schneiden sich zwei Sekanten eines Kreises außerhalb des Kreises, so ist das Produkt der Abschnittslängen vom Sekantenschnittpunkt bis zu den Schnittpunkten von Kreis und Sekante auf beiden Sekanten gleich groß.*

Sekanten-Tangentensatz. *Für jeden Punkt außerhalb eines Kreises ist die Länge des Abschnitts bis zum Berührungspunkt auf einer vom Punkt an den Kreis gelegten Tangente die mittlere Proportionale zu den Längen der Abschnitte, die der Kreis auf einer Sekante durch den Punkt abschneidet.*

Diese Sätze (und zahlreiche weitere) sollten jedem hinlänglich bekannt sein. Um sie besser rekapitulieren zu können, sei beginnend folgende Aufgabe gestellt:

Aufgabe 1. *Fertige zu jeder der oben genannten Sätze eine Skizze an, in der die Aussage deutlich wird.*

Es zeigt sich nämlich, dass das richtige Anfertigen von Analysisfiguren („Überlegungsskizzen“) tatsächlich entscheidend für das erfolgreiche Lösen von geometrischen Aufgaben ist.

So geht’s: Einfache Beispiele

Was können wir nun damit anfangen? Diese Sätze erlauben uns, weitere tolle Beweise zu führen. Beginnen wir einmal mit dem geläufigsten dieser Sätze, dem Peripheriewinkelsatz. Das erste Beispiel ist noch recht einfach zu lösen und sollte auch nicht unbekannt sein (40. Mathematik-Olympiade, Klasse 9/10, Stufe 3):

Beispiel 1. *Auf dem Bogen eines Halbkreises mit dem Durchmesser AB seien drei Punkte C, D und E so gelegen, dass die Sehnen AC und CD einander gleich lang sind, der Punkt E dem Bogen von D nach B angehört und keine zwei dieser fünf Punkte zusammenfallen. Beweisen Sie, dass sich unter dieser Voraussetzung die Sehnen AE und BC im gleichen Winkel schneiden wie die Sehnen CE und BD.*

Wie gehen wir an eine solche Aufgabe heran? Folgende Schritte sind allgemeingültig und sollten bei geometrischen Beweisen stets beachtet werden:

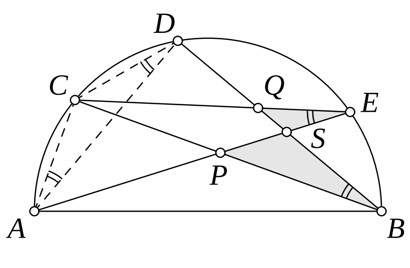
1. Fertige eine *korrekte* Skizze an. Kennzeichne darin gegebene und gesuchte Stücke. Vermeide dabei möglichst spezielle Figuren, etwa gleichschenklige oder gleichseitige Dreiecke (sie suggerieren beim Auffinden der Lösung Eigenschaften, die gar nicht vorhanden sind).
2. Überlege, welche Sätze in Frage kommen, die Behauptung zu beweisen. Wenn z. B. wie hier gleiche Winkel zu zeigen sind, sollten wir als erstes an die oben genannten Sätze über Winkel denken.
3. Wenn du eine Idee hast, führe *geeignete Bezeichnungen* für benötigte Stücke ein (Punkte, Winkel, Geraden, Kreise usw.) und halte dich daran. Nimm nur so viel Stücke wie unbedingt nötig.
4. … grübel, grübel, grübel … (leider kein Rezept außer Übung, Übung, Übung)
5. Denke an die *Beweisrichtung* beim Aufschreiben. Meist gehst du ja so vor, dass du annimmst, die Behauptung sei erfüllt und leitest aus ihr eine bekannte Aussage ab. Der Beweis muss aber von bekannten Aussagen zur Behauptung führen.
6. Formuliere deinen Beweis präzise und lückenlos, aber trotzdem knapp. Dein Korrektor wird von dir begeistert sein, wenn du alle drei Forderungen erfüllst!

Nun zur Lösung der obigen Olympiade-Aufgabe. Du solltest dabei erkennen (s. Bild): Wenn z. B. $\triangle PBS \sim \triangle QES$ gezeigt werden kann, hast du sie „im Kasten“. Dabei hilft dir: Zwei Dreiecke sind ähnlich, d. h., sie haben kongruente Innenwinkel, wenn sie in *zwei* Winkeln übereinstimmen (wegen der Winkelsumme im Dreieck sind dann die jeweils dritten Innenwinkel auch gleich). Der Rest ist einfach. *Zur Schreibweise:* $Q \equiv CE \cap BD$ ist etwas ungewöhnlich, heißt aber bloß, dass sich die Geraden CE und BD in einem Punkt schneiden (das Zeichen $\cap$), den ich Q nenne (das Zeichen $\equiv$); $\square$ bedeutet „w.z.b.w.“.

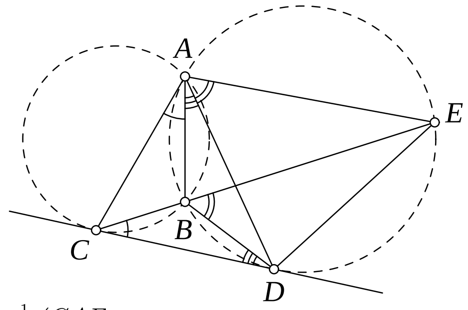
Beweis: (Bild) Es sei P der Schnittpunkt von AE und BC, $Q \equiv CE \cap BD$ sowie $S \equiv AE \cap BD$. Das Dreieck ACD ist nach Voraussetzung gleichschenklig mit deckungsgleichen Basiswinkeln $\measuredangle CAD = \measuredangle CDA$. Nach dem Peripheriewinkelsatz gilt nun:

$$\measuredangle CAD = \measuredangle CBD = \measuredangle CDA = \measuredangle CEA.$$

Die Dreiecke PBS und QES stimmen somit in den Winkeln bei B und E überein; außerdem sind die Winkel bei S gleich (Scheitelwinkel). Daher stimmen sie auch in den Winkeln bei P und Q überein. $\square$



Beispiel 2. *Zwei Kreise schneiden sich in den Punkten A und B. Eine der gemeinsamen Tangenten berühre den ersten Kreis in C und den zweiten in D. Der zu CD näher liegende Schnittpunkt sei B. Ferner schneide CB den zweiten Kreis ein weiteres Mal in Punkt E. Beweise, dass AD den Winkel CAE halbiert.*



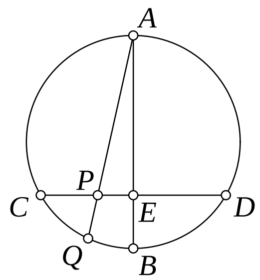
Beweis: (Bild) Es genügt, wenn wir folgende Gleichungskette in Winkeln aufschreiben und bei jedem Schritt angeben, warum dieser richtig ist:

$$\begin{aligned}\measuredangle CAD &= \measuredangle CAB + \measuredangle BAD \quad \text{(Winkelsumme)}\\ &= \measuredangle BCD + \measuredangle BDC \quad \text{(Sehnen-Tangentenwinkel-Satz)}\\ &= \measuredangle DBE \quad \text{(Außenwinkel im } \triangle BCD\text{)}\\ &= \measuredangle DAE \quad \text{(Peripheriewinkelsatz).}\end{aligned}$$

Aus $\measuredangle CAE = \measuredangle CAD + \measuredangle DAE$ und $\measuredangle CAD = \measuredangle DAE$ folgt $\measuredangle CAD = \frac{1}{2}\measuredangle CAE$. □

Nun gut, es müssen natürlich nicht immer Winkel sein. In geometrischen Aufgaben steckt mitunter auch eine gehörige Portion Algebra, wie folgende zwei Beispiele zeigen.

Beispiel 3. *In einem Kreis halbiere der Durchmesser AB die Sehne CD. Eine weitere Sehne AQ schneide CD in P. Dann hat der Ausdruck $AP \cdot AQ$ unabhängig von der Lage von P stets denselben Wert.*



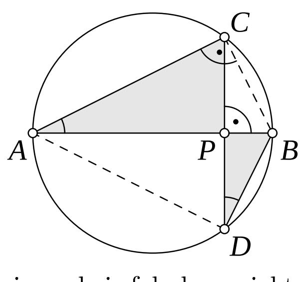
Beweis: (Bild) $AP \cdot AQ$ als Produkt zweier Streckenlängen erinnert irgendwie an den Sehnensatz, oder? Deshalb folgende kurze Rechnung:

$$\begin{aligned}AP \cdot AQ = AP(AP + PQ) &= AP^2 + AP \cdot PQ\\ &= AP^2 + CP \cdot PD \quad \text{(Sehnensatz)}\\ &= AP^2 + (CE - PE) \cdot (CE + PE) \quad \text{(Ziel: 3. binomische Formel)}\\ &= AP^2 + (CE^2 - PE^2) = AE^2 + CE^2 = AC^2 \quad \text{(Pythagoras).}\end{aligned}$$

Zweifellos ist AC unabhängig von der Lage von P. □

Beispiel 4. *Gegeben sei ein Kreis mit dem Durchmesser $d \equiv AB$. Eine zu AB senkrechte Gerade schneidet AB in P und den Kreis in C und D. Die Umfänge der Dreiecke APC und BPD verhalten sich zueinander wie $2:1$. Wie groß ist unter diesen Voraussetzungen das Verhältnis $AP : PB$?*
*(*39. Mathematik-Olympiade, Klasse 10, Stufe 3*)*

Lösung: (Bild) Es ist nicht schwer zu erkennen, dass die beiden betrachteten Dreiecke APC und BPD zueinander ähnlich sind. Außer im rechten Winkel bei P stimmen sie noch in den Winkeln $\measuredangle CAP = \measuredangle CAB = \measuredangle CDB = \measuredangle PDB$ überein, die Peripheriewinkel über der Sehne BC des Kreises sind. Für den Ähnlichkeitsfaktor gilt somit:



$$\lambda \equiv \frac{CP}{PB} = \frac{AP}{PD} = \frac{AC}{DB} \tag{1}$$

und daher nach Voraussetzung auch

$$\lambda = \frac{CP + AP + AC}{PB + PD + DB} = 2. \tag{2}$$

Da AB Durchmesser des Kreises ist, gilt ferner $CP = PD$ und somit nach (1) und (2): $AP = \lambda \cdot PD$, $PB = CP/\lambda$, also $AP/PB = \lambda^2 = 4$.

Was lernen wir hieraus? Vor allem zwei Dinge: *1.* Eine algebraische Identität, die irgendwie falsch aussieht, aber trotzdem richtig ist:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a+c+e}{b+d+f}.$$

Aufgabe 2. *Beweise diese Identität, d. h. zeige: Aus der linken Seite folgt die rechte und umgekehrt.*

(Wer das einmal gemacht hat, vergisst sie nie wieder ;-) *2.* Die Aufgabenkommission der Klassen 9/10 mag Olympiade-Aufgaben, in denen Halbkreise vorkommen. Ob das bei künftigen Olympiaden hilft?*

*Jetzt vielleicht nicht mehr, schade eigentlich.

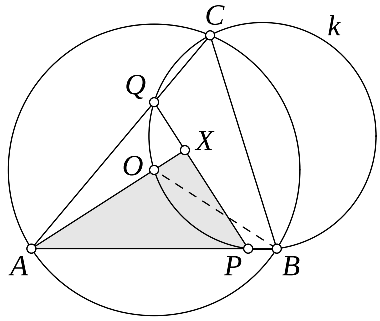
Wir gehen jetzt zu Aufgaben über, in denen schon mal zwei oder mehr Kreise auftauchen. Auch an allseits bekannte Beziehungen in Sehnenvierecken und Tangentenvierecken darf erinnert werden. Wie bereits zu erkennen war, bevorzugen wir natürlich richtige Olympiade-Aufgaben.

Beispiel 5. *$\triangle ABC$ sei ein spitzwinkliges Dreieck mit dem Umkreismittelpunkt O. Der Kreis k gehe durch C, O und B. Die Seiten AB und AC schneiden k ein weiteres Mal in P bzw. Q. Man beweise, dass die Geraden AO und PQ senkrecht aufeinander stehen.*
*(*Großbritannien, 1996*)*

Beweis: (Bild) Da die Strecken AO und PQ sich nicht schneiden, verlängern wir AO über O hinaus und bezeichnen den Schnittpunkt mit X. Wir haben also $\measuredangle AXQ = 90°$ zu zeigen. Nun ist $\measuredangle AXQ$ Außenwinkel in $\triangle AXP$ und als solcher gleich der Summe der Innenwinkel $\measuredangle PAX = \measuredangle BAO$ und $\measuredangle APX$. Letzterer ist Nebenwinkel zu $\measuredangle BPX$, der wiederum Supplementwinkel zu $\measuredangle BCQ$ im Sehnenviereck $PBCQ$ ist. Somit haben wir

$$\measuredangle AXQ = \measuredangle BAO + \measuredangle BCQ = \measuredangle BAO + \measuredangle BCA$$

und sind mit unseren Winkeln wieder vollständig in $\triangle ABC$. Nach dem Peripherie-Zentriwinkel-Satz gilt weiter $\measuredangle BCA = \frac{1}{2}\measuredangle BOA$, und da $\triangle BOA$ gleichschenklig ist: $\measuredangle BCA = 90° - \measuredangle BAO$. Diese Beziehung in obige Gleichung eingesetzt, ergibt die Behauptung. □



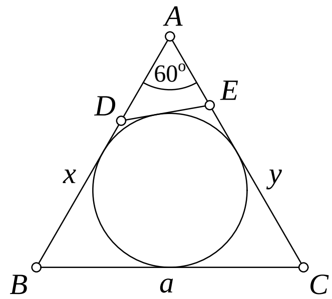
Beispiel 6. *Eine Gerade, die den Inkreis eines gleichseitigen Dreiecks ABC berührt, schneide die Seiten AB und AC in den Punkten D bzw. E. Zeige, dass*

$$\frac{AD}{DB} + \frac{AE}{EC} = 1.$$

*(*8. Iberoamerikanische Mathematik-Olympiade, Mexiko 1993*)*

Beweis: (Bild) DE teilt das gleichseitige Dreieck ABC in ein Tangentenviereck $BCED$ und ein kleineres Dreieck ADE. Mit $BD \equiv x$, $CE \equiv y$ und $a \equiv AB = BC = CA$ folgt: $DE = x + y - a$ (warum?). Andererseits ist nach dem Kosinussatz im Dreieck ADE

$$\begin{aligned} DE^2 &= AD^2 + AE^2 - 2AD \cdot AE \cdot \cos 60° \\ &= (a-x)^2 + (a-y)^2 - 2(a-x)(a-y) \cdot \frac{1}{2} \\ &= a^2 - a(x+y) + (x+y)^2 - 3xy. \end{aligned}$$



Gleichsetzen beider Ausdrücke für DE^2 liefert:

$$a = \frac{3xy}{x+y}.$$

Damit erhalten wir mit obigen Abkürzungen*

$$\frac{AD}{DB} + \frac{AE}{EC} = \frac{a-x}{x} + \frac{a-y}{y} = a\frac{x+y}{xy} - 2 = 3 - 2 = 1. \quad □$$

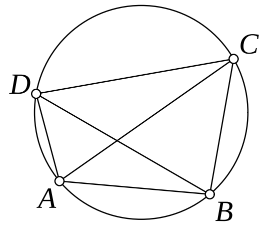
Abschließend sei noch ein Satz angegeben (allerdings ohne Beweis), der sich oft als sehr nützlicher Freund erweist, wenn man ihn kennt:

Beispiel 7. Satz des Ptolemäus. *(Bild) In einem konvexen Sehnenviereck ist die Summe der Produkte gegenüberliegender Seitenlängen gleich dem Produkt der Diagonalenlängen:*

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD.$$

Bemerkung: Ist $ABCD$ dagegen lediglich ein konvexes Viereck, gilt stets:

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD.$$

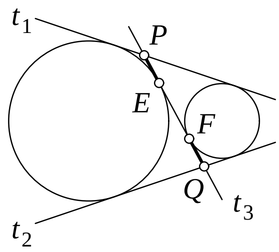


*$x \equiv AD$, $y \equiv AE$ zu setzen ist die schlechtere Wahl, da dann die Differenzen im Nenner stehen.

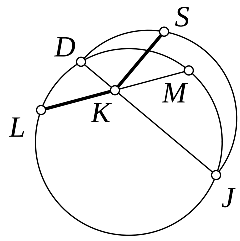
Weitere Aufgaben

So, genug des Vorführens. Jetzt dürft ihr ran! Hier einige Aufgaben, die noch nicht unter `www.math4u.de` zu finden sind, dafür aber kurz nach dem Einsendeschluss. Schüler der Klassen 9/10 sollten sich die Aufgaben 3, 4, 5 und 6 vornehmen, höhere Klassen die anderen Aufgaben. Viel Spaß dabei!

Aufgabe 3. (Bild) t_1, t_2 seien die äußeren Tangenten und t_3 eine innere Tangente zweier sich nicht schneidender Kreise. Weiterhin seien P, Q die Schnittpunkte von t_1 bzw. t_2 mit t_3 sowie E, F die Berührungspunkte der Kreise mit t_3. Man zeige, dass die Tangentenabschnitte an beide Kreise untereinander gleich sind: $PE = QF$.



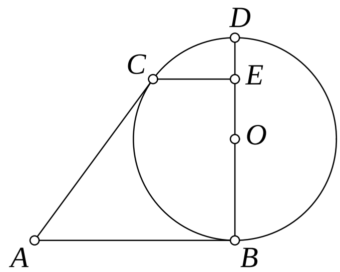
Aufgabe 4. (Bild) LM sei eine Sehne eines Kreises, die durch K halbiert wird. DKJ sei eine andere Sehne dieses Kreises. Es wird ein Halbkreis über dem Durchmesser DJ gezogen. Die Gerade durch K, senkrecht zu DJ, schneide den Halbkreis in S. Zeige, dass $KS = KL$ gilt.



Aufgabe 5. (Bild) AB und AC seien Tangenten an einen Kreis O_r (das bedeutet: Mittelpunkt O, Radius r) mit den Berührungspunkten B und C. Weiterhin sei CE senkrecht zum Durchmesser BD. Man beweise:

a) $BE \cdot BO = AB \cdot CE$,

b) $\dfrac{AB}{\sqrt{BE}} = \dfrac{BO}{\sqrt{ED}}$.



Aufgabe 6. Die Inkreise der Dreiecke ABC und CDA eines Tangentenvierecks $ABCD$ berühren sich in einem Punkt.

Aufgabe 7. Ein Kreis Γ mit dem Mittelpunkt O schneide einen anderen Kreis Γ' in den Punkten A und B. Es sei C ein Punkt auf dem Bogen von Γ, der in Γ' liegt. Ferner seien D, E die zweiten Schnittpunkte von Γ' mit den Geraden BC bzw. AC. Zeige, dass $DE \perp OC$ gilt.
(*Rußland, 1998*)

Aufgabe 8. Gegeben sei das Rechteck $ABCD$. Auf den Seiten AB, CD liegen die Punkte E und F, auf der Strecke EF der Punkt X. Es ist zu zeigen: Der zweite Schnittpunkt der Umkreise der Dreiecke AEX und CFX liegt auf der Diagonale AC.

Aufgabe 9. Über den Seiten eines Dreiecks seien Dreiecke nach außen errichtet, so dass die Summe der den Seiten gegenüberliegenden drei Winkel $180°$ beträgt. Dann haben die Umkreise dieser Aufsatzdreiecke einen gemeinsamen Punkt.

Aufgabe 10. In einem spitzwinkligen Dreieck ABC haben die Umkreise der Dreiecke HAB, HBC und HCA (mit H als Höhenschnittpunkt) denselben Radius.

Aufgabe 11. In der Ebene seien 4 Punkte gegeben, die weder sämtlich auf einem Kreis noch auf einer Geraden liegen. Können diese Punkte so mit P_1, P_2, P_3, P_4 bezeichnet werden, dass der Punkt P_4 innerhalb des durch die Punkte P_1, P_2, P_3 gehenden Kreises liegt?

Hier die traditionelle

ANDERE Aufgabe: Es werden n Punkte, die auf einem Kreis liegen, miteinander verbunden. Dabei sollen keine drei Sehnen durch einen gemeinsamen Punkt gehen. Man bestimme die Anzahl der dabei entstehenden Dreiecke, deren Eckpunkte im Innern des Kreises liegen.